

Meteorološka opazovanja in inštrumenti - vaje

Žiga Zaplotnik, Katarina Kosovelj in Matic Šavli

16. marec 2016

Kot pripomoček k pripravi na izpit pri predmetu Meteorološka opazovanja in inštrumenti smo v našem prvem letu poučevanja v študijskem letu 2015/2016 pripravili skripto z zbranimi nalogami iz vaj. Tem smo dodali še nekaj nalog za domačo vajo. Veliko nalog sta pripravila že nekdanja asistenta pri tem predmetu, dr. Rahela Žabkar in dr. Gregor Skok, nekaj pa tudi že njuni predhodniki. Zato se jim zahvaljujemo! Nekaj nalog smo razširili, precej pa dodali na novo.

Upamo, da bo skripto študentom meteorologije dober učni pripomoček. Skripto nameravamo vsako leto dopolniti z novimi nalogami in nalogami z izpitov.

Veselim se vsakršnih komentarjev, pripomb, slogovnih, tehničnih in vsebinskih ali drugih strokovnih popravkov! Naprošamo, da te sporočite avtorju posameznih razdelkov.

Poglavja o merjenju temperature, zračnega pritiska, vetra in vlage je pripravil Žiga Zaplotnik (ziga.zaplotnik@fmf.uni-lj.si). Poglavja o merjenju izhlapevanja, sevanja, vidnosti, višine snežne odeje in kratek povzetek o meteoroloških depešah in klasifikaciji oblakov je pripravila Katarina Kosovelj (katarina.kosovelj@fmf.uni-lj.si). Poglavje o naprednih meteoroloških inštrumentih je pripravil Matic Šavli (matic.savli@fmf.uni-lj.si). Dodatne naloge so na voljo za utrjevanje snovi in so deloma povzete iz starih kolokvijev in izpitov, deloma pa pripravljene na novo (za vprašanja naslovite Žiga).

Poglavje 1

Merjenje temperature

1.1 Uvod

Merjenje temperature zraka (termometrija) je merjenje absolutne temperature. Ljudje ob dotiku nekega predmeta ne občutimo absolutne temperature, temveč zgolj toplotni tok, ki je posledica razlike v temperaturi med delom našega telesa in predmetom. Bolj toplotno prevodne snovi (npr. kovine) se zdijo na otip hladnejše od izolatorjev (npr. stiropora), pa čeprav imajo oboji enako nizko temperaturo. Obratno se zdijo pri temperaturi, ki je višja od telesne temperature preizkuševalca, snovi z večjo toplotno prevodnostjo toplejše.

Absolutna mera za temperaturo je **termodinamska temperatura**. Pri $T = 0\text{ K}$, torej pri absolutni ničli, se delci v tekoči ali v plinasti snovi prenehajo gibati, v kristalni strukturi pa prenehajo oscilirati. Temperatura je torej navzdol omejena. Sedaj pa opišimo, kaj termodinamsko temperatura sploh pomeni. Za začetek definirajmo sistem - to je posamezen del neke snovi, v atmosferi pa preprosto nek delec zraka. Sistem je odprt, če izmenjuje snov in energijo z okolico. Jasno je, da so v atmosferi vsi sistemi odprti. Obratno je zaprt sistem tak, ki ne izmenjuje teh dveh količin z okolico. Kljub temu, da je večina sistemov v atmosferi odprtih, s privzetkom o zaprtih sistemih ne napravimo prevelike napake:

- kadar je sistem dovolj velik, da je pretok energije in snovi na robovih zanemarljivo majhno glede na velikost sistema,
- kadar je sistem del večjega homogenega sistema, kar pomeni da prehajajo prek robov ven in noter snovi z enakimi termodinamičnimi lastnostmi.

V tridimenzionalnem svetu je (klasičnomehansko) za popoln opis nekega sistema potrebno poznati ob vsakem času pozicijo in hitrost vsakega točkastega masnega delca, torej $6N$ spremenljivk. Ker je takšen opis že v ekstremno majhnem laboratoriju praktično nemogoč, kaj šele v laboratoriju, kot je atmosfera, se zatečemo k termodinamskemu opisu, torej opisu povprečnih lastnosti sistema. Temperatura je neodvisna termodinamična spremenljivka, ki poleg tlaka p in geometrije (določene z volumnom, V) opisuje homogen in zaprt sistem v plinu ali tekočini v termodinamičnem ravnovesju. Odnosi med temi spremenljivkami so določeni z enačbo stanja

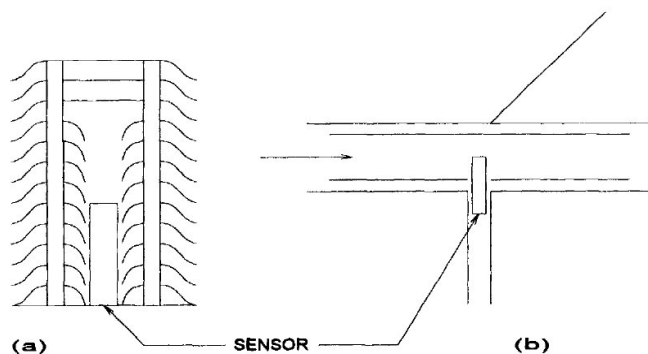
$$f(p, V, T) = 0 .$$

To pomeni, da katerokoli izmed spremenljivk lahko izrazimo samo kot funkcijo ostalih dveh, npr. $V = V(T, p)$. Primer enačbe stanja je enačba stanja idealnega plina

$$p = \rho RT , \tag{1.1.1}$$

kjer smo z $\rho = m/V$ vpeljali novo neodvisno dinamično spremenljivko, R pa je specifična plinska konstanta, torej plinska konstanta za posamezen čist plin ali mešanico (zrak), ki jo dobimo kot kvocient splošne plinske konstante R^* in molekulske mase M .

Vrednost temperature je določena s smerjo toplotnega toka med dvema telesoma. Pri tem je telo, ki izgublja toploto napram drugemu telesu, po definiciji pri višji temperaturi. Absolutna enota za vrednotenje temperature je Kelvin (K). Praktično se v meteorologiji povsod po svetu (razen v anglosaškem svetu) uporablja Celzijeva skala. Ta ima ničlo pri ledišču vode, torej $0^\circ\text{C} = 273.15\text{ K}$.



Slika 1.1: Dve izvedbi zaščite termometra pred direktnim sončnim sevanjem: a) radiacijski ščit iz več ukrivljenih ploščic in b) temperaturni senzor se nahaja znotraj vetrokaza, ki je spredaj odprt, da je zagotovljena največja možna naravna prevetrenost. Vir: [2].

Svetovna meteorološka organizacija (World Meteorological Organization, WMO) definira temperaturo zraka takole: temperatura zraka je temperatura, ki jo kaže termometer, postavljen v senco, ki ga ščiti pred direktnim sončnim sevanjem (slika 1.1). Ta definicija hkrati že sodoloča pogoje o izvedbi in natančnosti meritev temperature zraka v meteorologiji:

- termometer mora biti zaščiten pred padavinami in kodenzom,
- nahajati se mora na dobro prezračevanem mestu,
- skala termometra oz. razpon ustreza značilnostim klime izbranega območja,
- območje merjenja $T \in [-80^\circ\text{C}, 60^\circ\text{C}]$,
- natančnost 0.1 K za $-40^\circ\text{C} \leq T \leq 40^\circ\text{C}$ in 0.3 K za $T > 40^\circ\text{C} \vee T < -40^\circ\text{C}$,
- časovna konstanta $\tau = 20\text{ s}$,
- čas povprečevanja $t_a = 60\text{ s}$ (v primeru merjenja z občutljivimi termometri s časovno konstanto $\tau < 20\text{ s}$).

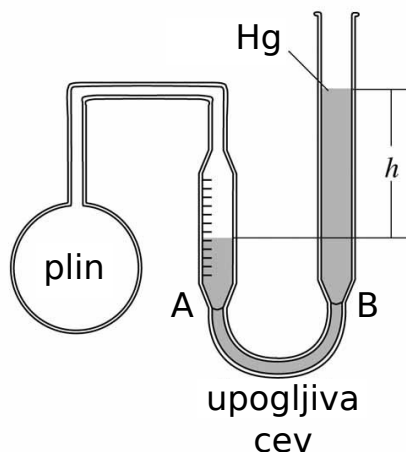
Navedimo še, katere spremembe fizikalnih lastnosti izkoriščamo pri merjenju temperature:

- raztezanje snovi s temperaturo in s tem povezane tlačne ali volumske spremembe,
- spremembo električnega upora s temperaturo: električni upor se pri višji temperaturi poveča, saj se s temperaturo povečuje pogostost trkov elektronov z gradniki v snovi, naj bodo to proste molekule/atomi v plinu ali tekočini ali atomi v kristalni strukturi,
- spremembo kapacitivnosti kondenzatorja z dielektrikom med ploščama (raztezanje dielektrika med ploščama),

- spremembo spektralne sevalnosti teles v infrardečem delu spektra elektromagnetnega valovanja (radiometrični termometri),
- spremembo hitrosti zvoka oz. fazne hitrosti zvočnega valovanja v zraku (ultrasonični termometri),
- termoelektrične spremembe.

1.2 Plinski termometer

S plinskim termometrom merimo temperaturo, ki je posledica tlačnih sprememb v plinu, ki ga držimo v posodi pri konstantni prostornini, ali prostorninskih sprememb, če plin držimo pri konstantnem pritisku, npr. tako da pritiskamo na eno steno posode s konstantno silo, pri tem pa dovolimo spremembo volumna. Bolj pogosti so prvi. Shema delovanja plinskega termometra, ki ga držimo pri konstantni prostornini (ang. constant-volume gas thermometer), je prikazana na sliki 1.2. Sestavlja ga plinska komora, ki je povezana z rezervoarjem A, izpolnjenim z živosrebrno tekočino. Rezervoar A je prek upogljive cevi povezan z rezervoarjem B, ki ga lahko premikamo v navpični smeri. Če segrejemo plin, lahko njegovo prostornino obdržimo nespremenjeno tako, da dvignemo rezervoar B in s tem povečamo pritisk živosrebrne tekočine v rezervoarju A na plin. Višina živosrebrne tekočine v A mora torej ostati nespremenjena. Sprememba višine stolpca živega srebra v B pa odraža spremembo v tlaku, ki jo lahko povežemo s spremembo temperature. Plin v komori ni razredčen, idealen, plin, saj bi bilo sicer kakršnekoli spremembe težko natančno izmeriti. Zato z ekstrapolacijo izračunamo, kakšne bi bile tlačne spremembe, če bi bil plin redek, in jih povežemo s temperaturnimi spremembami.

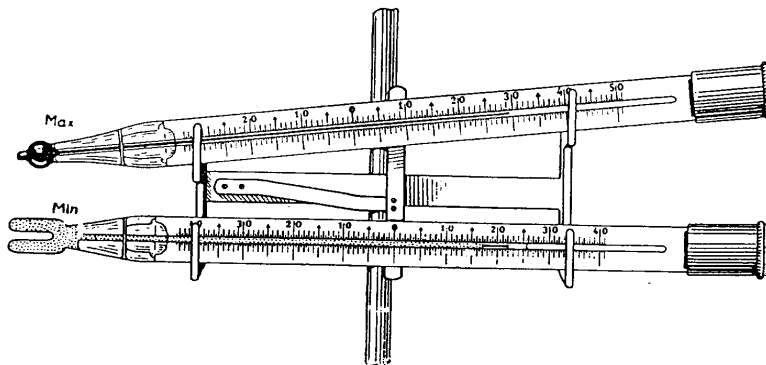


Slika 1.2: Shema delovanja plinskega termometra.

Plinski termometer je okoren, primeren za laboratorijsko uporabo in ne za vsakodnevno merjenje temperature zraka. V praksi se uporablja zgolj za natančno umeritev ostalih termometrov, uporabljal se je za določitev odvisnosti električnega upora žičke iz čiste platine v odvisnosti od temperature [8].

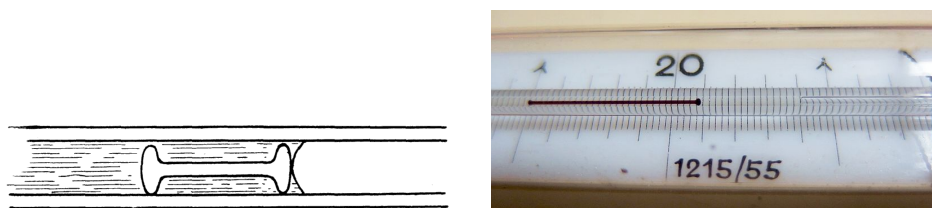
1.3 Kapljevinski termometer

Kapljevinski termometer sestoji iz bučke in dolge ter v primerjavi z bučko zelo ozke kapilare, ob kateri je zarisana temperaturna skala. Volumen bučke je mnogi večji od volumna kapilare, torej $V_b \gg V_k$. Kapljevina, ki izpolnjuje termometer, je bila v preteklosti običajno alkoholna ali živosrebrna, slednjo pa danes predvsem zaradi strupenosti njenih hlapov nadomeščajo zdravju neškodljive ionske tekočine.



Slika 1.3: Maksimalni termometer in minimalni termometer.

Najprej navedimo dve posebni vrsti analognih kapljevinskih termometrov, ki jih uporabljamo za merjenje dnevnih ekstremov - **minimalni** in **maksimalni termometer** (slika 1.3). Minimalni termometer je postavljen horizontalno, bučka je izpolnjena z alkoholom, ki ima nizko temperaturo ledišča (100 % alkohol, etanol, ima ledišče pri -112°C) v primerjavi z živim srebrom, ki preide v trdno stanje že pri -39°C in je v mnogih podnebjih neuporaben. V kapilari termometra se nahaja plavač (slika 1.4). Ko se temperatura niža, se prostornina tekočine zmanjšuje in meniskus tekočine potiska plavač v smeri bučke. Tik pod gladino meniskusa tekočine kaže namreč sila površinske napetosti v smeri bučke. Ko temperatura naraste, se tekočina razteza, meniskus tekočine se premakne v smeri proč od bučke, plavač pa ostane na mestu in do prihoda vremenoslovca kaže najnižjo temperaturo v nekem časovnem obdobju.



Slika 1.4: Plavač v minimalnem termometru. [LEVO] Podrobna ilustracija vzeta iz knjige C. R. Darling: *Liquid Drops and Globules*. [DESNO] Fotografija plavača v alkoholni tekočini. Vir: danyk.cz.

Princip delovanja maksimalnega termometra je zelo podoben delovanju kliničnega termometra za merjenje telesne temperature. Oba imata namreč v kapilari ožino, prek katere pri poviševanju temperature živosrebrna tekočina zaradi raztezanja teče proč od bučke. Ko pa temperatura pade, se ravno zaradi te ožine tekočina ne more vrniti v bučko, živosrebrna "nit" se pretrga, odtrgan del pa do prihoda vremenslovca kaže maksimalno temperaturo. Maksimalni termometer je nagnjen za nekaj stopinj glede na horizontalo

z bučko, da se zaradi ožine s klančino ne bi živosrebrna tekočina sama od sebe pretrgala, premaknila še malekonst dlje od bučke in posledično indicirala višjo maksimalno temperaturo od dejanske.

1.3.1 Naloga - časovna konstanta Hg termometra

Z živosrebrnim termometrom merimo temperaturo tal v neki globini. V toplotnem stiku z zemljo je zgolj bučka. Kapljevina je dober toplotni prevodnik, zato ima po celem termometru enako temperaturo. Debelina bučke je 5 mm (notranji polmer), debelina kapilare 1 mm, debelina stekla, ki ju obdaja, pa zgolj 0.1 mm. Kako se s časom spreminja temperatura, ki jo termometer izmeri, če je njegova začetna temperatura (ko ga vzamemo iz škatlice) enaka $T_{zac} = 22^\circ\text{C}$, temperatura tal pa je po višini konstantna in enaka $T_0 = 4^\circ\text{C}$? Za koliko % se spremeni časovna konstanta termometra, če imamo s kapljevino izpolnjeno namesto 10 cm dolgo kapilaro 30 cm dolgo.

Med snovema z različnima temperaturama steče toplotni tok $\vec{j} = -\lambda \nabla T$, kjer je λ koeficient toplotne prevodnosti. V našem primeru teče energijski tok od toplejše bučke k hladnejši zemlji homogeno prek cele tanke površine bučke, z izjemo zanemarljivo majhnega dela površine na stiku bučke in kapilare. Posledično se termometer hladi. V splošnem velja sledeča kontinuitetna enačba:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

kjer je $\vec{j}$ vektor energijskega toka (v našem primeru je v vsaki točki površine pravokoten nanjo in kaže radialno navzven), vektor površinskega elementa $d\vec{S}$ pa je ravno tako pravokoten na površino in po definiciji kaže navzven. Kjer je skalarni produkt $\vec{j} d\vec{S}$ pozitiven, teče torej energijski tok ven iz območja, ki ga omejuje površina S , posledično se območje ohlaja, in obratno. Parcialna diferencialna enačba za temperaturo T je sledeča:

$$mc_p^{\text{Hg}} \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) S.$$

Gradient temperature med notranjo in zunanjo površino stekla bučke z debelino d lahko izrazimo kar kot $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_0 - T}{d} < 0$. Pri tem smo upoštevali, da je debelina stekla mnogo manjša od radija bučke, torej $d \ll r_B$. Temperatura je torej zgolj funkcija časovne koordinate, zato lahko uporabimo totalni odvod namesto parcialnega. Zgornjo enačbo prepišemo v

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda S}{mc_p^{\text{Hg}} d} (T_0 - T) = \frac{1}{\tau} (T_0 - T),$$

kjer je τ časovna konstanta oz. odzivni čas inštrumenta. Ločimo spremenljivke, izračunamo integral

$$\int_{T_{zac}}^{T(t)} \frac{dT}{T_0 - T} = \int_0^t \frac{dt}{\tau}$$

in končno dobimo izraz za spreminjanje temperature s časom

$$T(t) = T_{zac} e^{-t/\tau} + T_0(1 - e^{-t/\tau})$$

Izračunamo še spremembo časovne konstante termometra zaradi spremembe dolžine s

kapljevino izpolnjene kapilare

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{mc_p d}{\lambda S} = \frac{c_p d \rho}{\lambda} \frac{V_b + V_k}{S_b} = \\ &= \frac{c_p d \rho}{\lambda} \frac{V_b + \pi r_k^2 l}{S_b} = \\ &= \frac{c_p d \rho}{\lambda} \frac{V_b}{S_b} \left(1 + \frac{\pi r_k^2 l}{V_b}\right)\end{aligned}$$

Časovna konstanta τ je linearna z dolžino kapilare l . Zato lahko njeno spremembo $\Delta\tau$ s spremembo dolžine Δl zapišemo kot

$$\Delta\tau = \frac{c_p d \rho}{\lambda} \frac{\pi r_k^2 \Delta l}{S_b}.$$

Relativna sprememba časovne konstante je torej

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\pi r_k^2 \Delta l}{V_b + \pi r_k^2 l} \stackrel{(V_b \gg \pi r_k^2 l)}{=} \frac{\pi r_k^2 \Delta l}{\frac{4}{3} \pi r_b^3}.$$

1.3.2 Naloga - fluktuacije zunanje temperature

Zunanja temperatura zraka T_z fluktuira s periodo 3 s za $\Delta T = 1$ K. Povprečna temperatura zraka je $T_0 = 30^\circ\text{C}$. Začetna temperatura termometra je $T_{zac} = 32^\circ\text{C}$. Znana je časovna konstanta termometra $\tau = 10$ s. Kolikšna je amplituda izmerjene temperature po dolgem času? Kako se amplituda signala spreminja s časovno konstantno?

Diferencialna enačba (DE), ki opiše naraščanje/padanje temperature s časom, je v tem primeru sledeča

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_0 + \Delta T \sin(\omega t) - T). \quad (1.3.1)$$

Imamo torej diferencialno enačbo (DE) z neločljivimi spremenljivkami. Najprej rešimo njen homogeni del $\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau}T$, iz katerega izluščimo $T_h = p(t)e^{-t/\tau}$, kjer je $p(t)$ časovno odvisna funkcija. S tem nastavkom za rešitev si skušamo pokoriti začetno DE (1.3.1). Ostane nam še DE za $p(t)$

$$\frac{d}{dt} = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} (T_0 + \Delta T \sin(\omega t)).$$

Zgornjo rešitev izračunamo kot vsoto integralov

$$p(t) = \frac{T_0}{\tau} \underbrace{\int e^{t/\tau} dt}_A + \frac{\Delta T}{\tau} \underbrace{\int e^{t/\tau} \sin(\omega t) dt}_B + C.$$

Integral A je preprost in enak $\tau e^{t/\tau}$, integral B pa nekoliko težji. Lotimo se ga z znano metodo integriranja po delih (per-partes). Z dvakratno uporabo te metode lahko rekurzivno izračunamo integral

$$\int e^{t/\tau} \sin(\omega t) dt = I_B = -\frac{1}{\omega} e^{t/\tau} \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 \tau} e^{t/\tau} \sin(\omega t) - \frac{1}{\omega^2 \tau^2} I_B,$$

odkoder sledi, da je integral I enak

$$I_B = \frac{\tau e^{t/\tau} (\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t))}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Celotna rešitev $p(t)$ je tako enaka

$$p(t) = T_0 e^{t/\tau} + \Delta T e^{t/\tau} \frac{\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau^2} + C ,$$

skupna rešitev pa

$$T(t) = p(t) e^{-t/\tau} = T_0 + \Delta T \frac{\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau^2} + C e^{-t/\tau}$$

Iz začetnega pogoja $T(0) = T_{zac}$ poiščemo še konstanto $C = T_{zac} - T_0 + \Delta T \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$. Končna rešitev za potek izmerjene temperature v odvisnosti od časa je enaka

$$T(t) = \left(T_{zac} - T_0 + \Delta T \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) e^{-t/\tau} + T_0 + \Delta T \frac{\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau^2} .$$

Odgovorimo še na vprašanja naloge. Po dolgem času, $t \rightarrow \infty$, ko se termometer prilagodi zunanji temperaturi, je spreminjanje temperature enako

$$T(t) = T_0 + \Delta T \frac{\sin(\omega t) - \omega \tau \cos(\omega t)}{1 + \omega^2 \tau^2} ; .$$

Potek temperature s časom za podatke iz naše naloge je prikazan na sliki 1.5. Amplitudo nihanja dobimo z upoštevanjem sledečega dejstva. Katerakoli linearna kombinacija kosinusnega in sinusnega vala z enako periodo je enaka sinusnemu valu z enako periodo, vendar faznim zamikom in drugo amplitudo, torej

$$A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t + \phi) .$$

Parametra C in ϕ je z uporabo adicijskega izreka trivialno izraziti z znanima A in B . Amplituda nihanja v našem primeru je torej enaka

$$A = \frac{\Delta T}{1 + \omega^2 \tau^2} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\Delta T}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} ,$$

fazni zamik izmerjene temperature napram temperaturi zraka pa

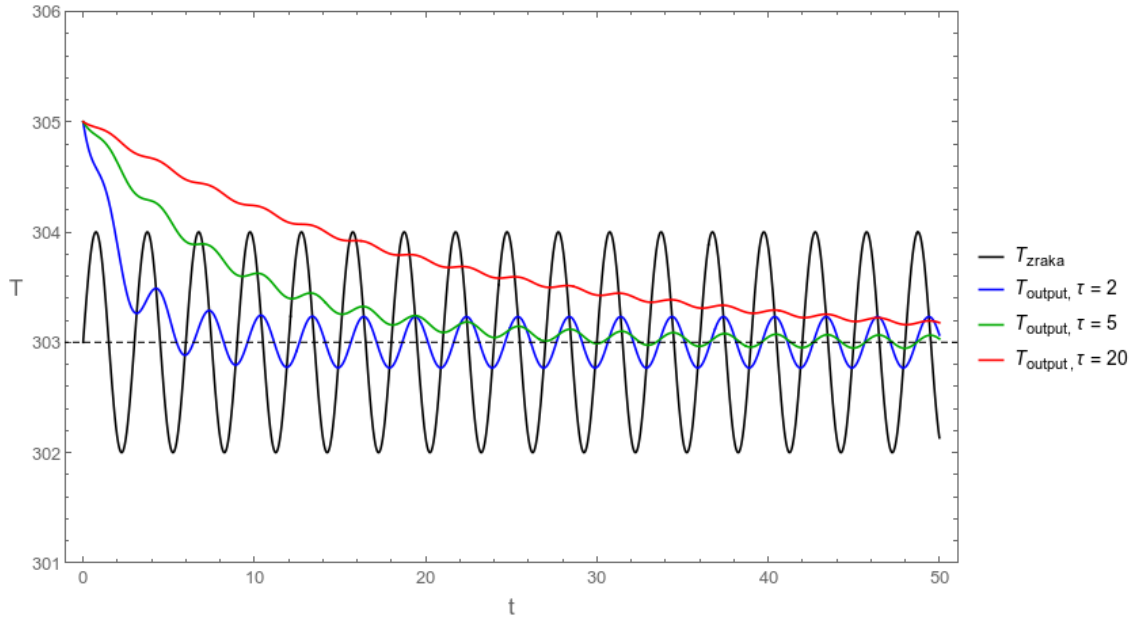
$$\phi = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \right) .$$

Pri vrednostih $\tau = 10$ s, $\omega = 2\pi/3$ s⁻¹ in $\Delta T = 1$ K je amplituda izmerjene temperature enaka $A = 0.045$ K, kar je manj od zahtevane natančnosti 0.05 K. Fazni zamik poteka izmerjene temperature pa je praktično za vse daljše časovne skale $\tau \gg 1$ s približno 90°.

1.3.3 Naloga - napaka radiosondažne meritve temperature

Ob jasnem dnevu meteorolog v zrak spusti s helijem polnjen vremenski balon z radiosondo. Kmalu po začetnem pospeševanju doseže balon ravnovesno hitrost 6 m s⁻¹. Pri tleh je zrak pregret, plast med tlemi in 1 kilometrom višine je nestabilna z gradientom temperature $dT/dz = -10$ K km⁻¹. Kolikšno napako napravi termometer na višini 1 km, če je njegova časovna konstanta $\tau = 20$ sekund? Pri tleh sta izmerjena temperatura in dejanska okolišnja temperatura izenačeni in enaki T_0 .

Namig: zapiši dinamično enačbo za spreminjanje temperature, ki jo izmeri termometer. Pri tem zapiši, kako se s časom spreminja temperatura okolice!



Slika 1.5: Potek zunanje temperature $T_z(t)$ in potek izmerene temperature $T(t)$ pri različnih vrednostih časovne konstante τ . Daljša časovna konstanta pomeni kasnejšo prilagoditev termometra na spremembo temperature, vendar tudi manjše nihanje izmerjene temperature. Za merjenje atmosferskih meritev običajno uporabljamo termometre s časovno konstanto $20\text{ s} < \tau < 40\text{ s}$.

1.3.4 Naloga - skala živosrebrnega termometra

Želimo živosrebrni termometer s skalo na desetinko stopinje. Predpostavimo, da je 0.5 mm tista sprememba višine stolpca, ki jo še lahko razberemo s prostim očesom. Premer bučke naj bo $2r_b = 5\text{ mm}$. Raztezanje stekla zanemarimo. Kolikšen naj bo premer kapilare?

Zapišimo še matematično željeno ločljivost skale

$$\frac{dl}{dT} = \frac{0.5\text{ mm}}{0.1\text{ K}} = 5 \times 10^{-5}\text{ m K}^{-1}.$$

Sprememba volumna kapljevine je posledica spremembe temperature kapljevine v bučki termometra. Delu tekočine, ki se nahaja v kapilari, se ravno tako spremeni volumen (ta del zanemarimo, saj je $V_b \gg V_k$). Vsa sprememba volumna se izrazi v spremembi višine stolpca tekočine v kapilari, torej

$$dV = V\beta dT = Sdl = \pi r_k^2 dl,$$

kjer je

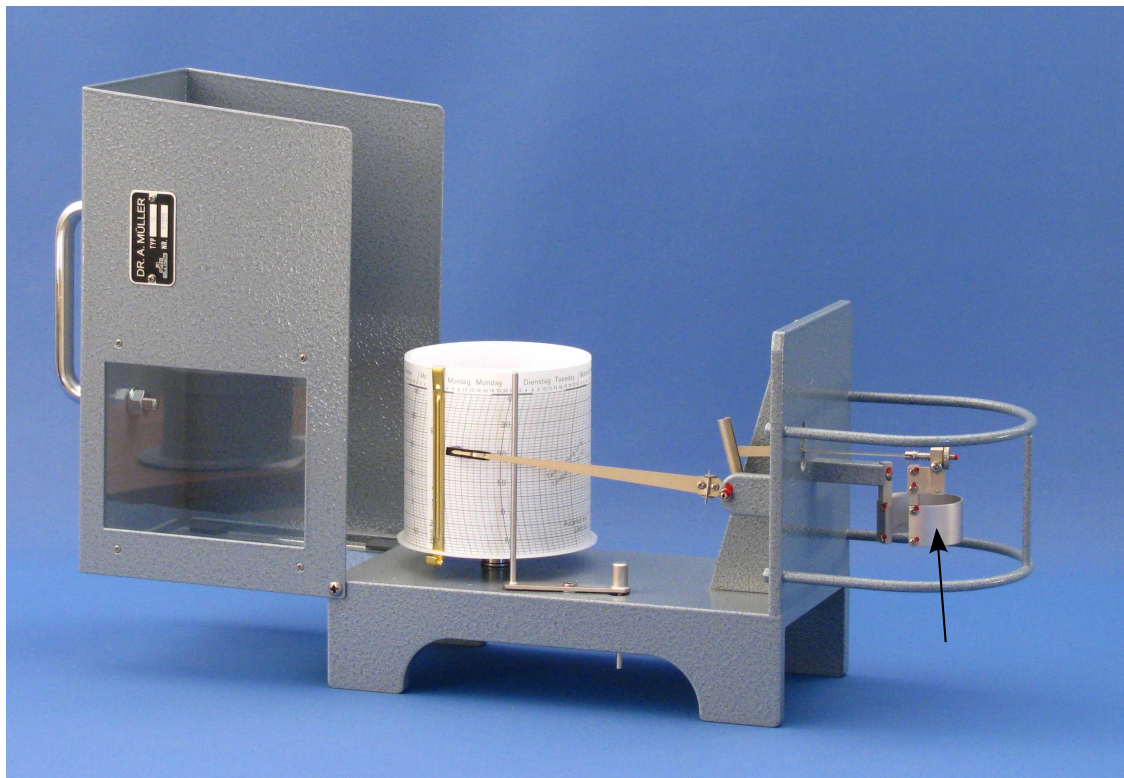
$$V = \frac{4}{3}\pi r_b^3.$$

Odtod izračunamo potreben radij kapilare

$$r_k = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}r_b^3\beta}{\frac{dl}{dT}}} = 0.275\text{ mm} \longrightarrow d_k = 2r_k = 0.55\text{ mm}.$$

1.4 Bimetalni trak

Bimetalni trak je trak iz dveh tankih plasti kovin z različnima koeficientoma linearnega raztezka α . V praksi se uporablja v termostatih (kot stikalo) in termografih (slika 1.6).



Slika 1.6: Bimetalni trak v termografu (označen s črno puščico) je prek sistema vzvodov povezan s pisalom, ki označuje spremembe temperature na papirju, nataknenem na počasni vrteči kolut. Prednost termometra z bimetalnim trakom je njegova vzdržljivost in preprosto umerjanje, slabost pa počasen odziv na temperaturne spremembe zaradi toplotne kapacitete kovine. Tipično bimetalni trak sestavljata jeklo in baker, lahko pa tudi jeklo in medenina.

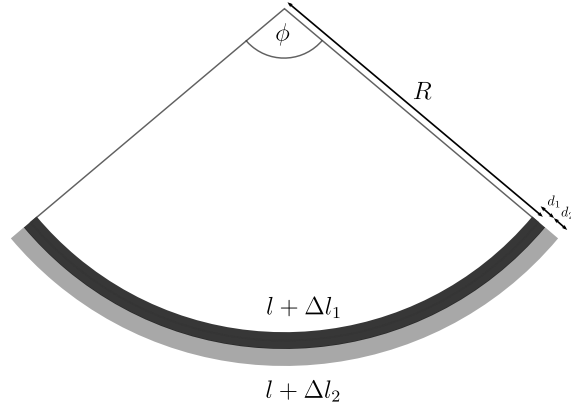
Bimetalni trak, ki je pri temperaturi T_0 raven, se pri $T \neq T_0$ ukrivi kot krožni lok (slika 1.7). Če ga parametriziramo kot krivuljo v naravnem koordinatnem sistemu, je njegova ukrivljenost $\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{1}{R} = \text{konst.}$ Pri tem je $\vec{t}(s)$ tangenti vektor na traku pri koordinati s in R radij ukrivljenosti (krivinski polmer).

V praktičnih izvedbah je bimetalni trak že v osnovnem stanju zviti, da ga lahko več spravimo na enak prostor. Linearna koeficienta raztezka α_1 in α_2 morata v tem primeru biti vsaj za velikostni red različna, pri čemer je kovina z večjim koeficientom raztezka na zunanji strani.

Izračunajmo, kolikšen kot ϕ opiše krožni lok pri spremembi temperature za ΔT . Pri izpeljavi (ne povsem fizikalno sprejemljivo) privzamemo, da je medsebojna sila na stiku obeh kovin enaka 0. Za podrobnejšo razlago po študiju elastomehanike pri predmetu Mehanika kontinuov priporočam [1, 3]. Raztezek dolžine l s koeficientom linearnega raztezka α_i je enak

$$\Delta l_i = l \alpha_i \Delta T,$$

Skupni dolžini sredine dela notranjega traku in sredine zunanjega traku po raztezanju sta



Slika 1.7: Ukrivitev bimetalnega traku pri temperaturi $T > T_0$. Za koeficienta linearnega raztezka velja $\alpha_2 > \alpha_1$.

enaki

$$\begin{aligned} l + \Delta l_1 &= l(1 + \alpha_1 \Delta T) = R\phi, \\ l + \Delta l_2 &= l(1 + \alpha_2 \Delta T) = \left(R + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)\phi, \end{aligned}$$

odkoder dobimo

$$\phi = \frac{2l\Delta T(\alpha_2 - \alpha_1)}{d_1 + d_2}$$

ter ukrivljenost

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{2\Delta T(\alpha_2 - \alpha_1)}{1 + \alpha_1 \Delta T}.$$

Točna enačba za ukrivljenost pa je

$$\kappa = \frac{6E_1E_2(d_1 + d_2)d_1d_2(\alpha_2 - \alpha_1\Delta T)}{E_1^2d_1^4 + 4E_1E_2d_1^3d_2 + 6E_1E_2d_1^2d_2^2 + 4E_1E_2d_2^3d_1 + E_2^2d_2^4},$$

kjer sta E_i Youngova modula obeh snovi.

1.4.1 Naloga - bimetalni trak z navitjem

Bimetalni trak je navit okoli jedra kot kaže slika 1.8. Sestavljata ga dve kovini, katerih linearna koeficienta raztezka sta $\alpha_1 = 1.7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ in $\alpha_2 = 2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Trak obide jedro 10-krat. Povprečen premer jedra d je 1 cm. Debelina traku je 1 mm, pri čemer sta plasti obeh kovin enako debeli. Za koliko se spremeni kot prostega zgornjega konca navitja na jedru, če povečamo temperaturo za 10°C ? Kako bi povečali občutljivost merilca? Upoštevaj, da je spodnji konec navitja pričvrščen! Kolikšno pa je merilno območje instrumenta?

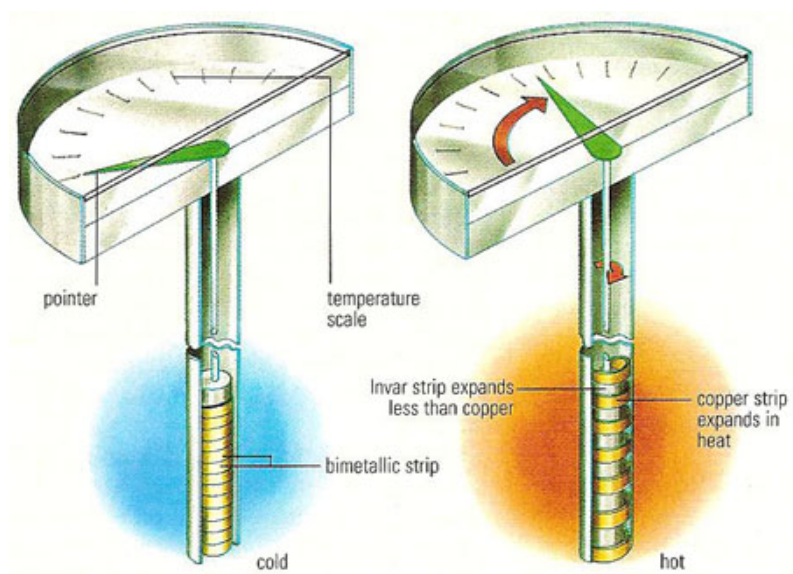
Upoštevamo zgolj raztezek kovine na zunanji strani z linearnim koeficientom raztezka α_2 . Kovina na notranji strani z nizkim koeficientom linearnega raztezka namreč zgolj zagotavlja, da se bo bimetalni trak sam od sebe navijal okoli tankega jedra. Linearni raztezek je torej enak

$$\begin{aligned} \Delta l &= l\alpha_2\Delta T, \quad l = N2\pi d/2 \\ &= R\Delta\phi \end{aligned}$$

Odtod dobimo izraz za spremembo $\Delta\phi$ v odvisnosti od spremembe temperature

$$\Delta\phi = 2N\pi\alpha_2\Delta T = 7.2^\circ.$$

Občutljivost navitja na temperaturne spremembe bi povečali s številom navojev N .



Slika 1.8: Bimetalno navitje (vir: www.processtechacademy.com).

1.5 Uporovni termometer

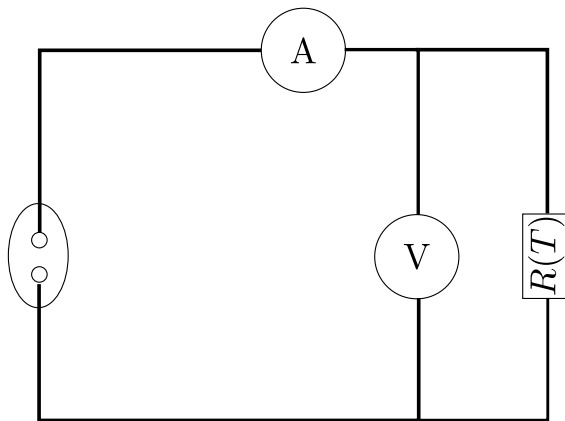
Upornik je tanka navita platinasta žička ali ploščica. Zakaj platina?

- upor R se s temperaturo T močno spreminja,
- $R(T)$ je zvezna funkcija, brez diskontinuitet, skoraj povsem linearna,
- je stabilna (ne reagira s snovmi iz okolice, npr. kisikom (korozijska)), torej ne spreminja svojih kemičnih lastnosti,
- široko merilno območje, od -272.5°C do skoraj 1000°C .

Spreminjanje upora s temperaturo za platinasti upornik:

$$R(T) = R_0(T_0) \left(1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 \right), \quad (1.5.1)$$

kjer je $\alpha = 3.9 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} > 0$ in $\beta = -5.7 \times 10^{-7} \text{ K}^{-1}$. Velja torej $|\alpha| \gg |\beta|$ in funkcija $R(T)$ je skoraj povsem linearna.



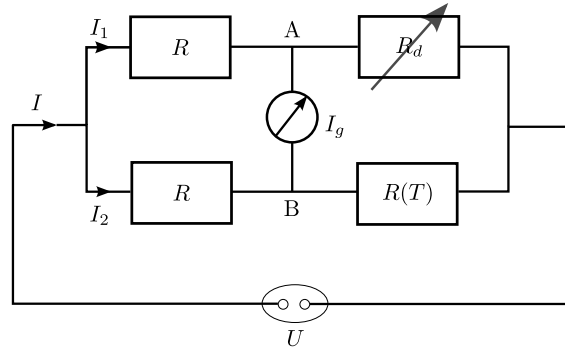
Slika 1.9: Najpreprostejša shema vezave, s katero pomerimo upor upornika $R(T)$. Prek pomerjenega upora ob upoštevanju znane relacije (1.5.1) inverzno izračunamo temperaturo T .

Na sliki 1.9 je prikazana najpreprostejša shema vezave, s katero pomerimo upor upornika $R(T)$. Z ampermetrom A pomerimo tok I skozi tokovni generator. Če je notranji upor R_V voltmetra V mnogo manjši od upora upornika, torej $R_V \ll R(T)$, je tok skozi ampermeter kar enak toku I_R skozi upornik, torej $I_R \approx I$. Z voltmetrom pomerimo napetost U , ki je enaka napetosti na uporniku. Posledično lahko upor upornika preprosto izrazimo kot $R(T) = U/I$.

1.5.1 Uporovni termometer - praktična vezava z Wheatstonovim mostičkom

Vezje sestavljajo (slika 1.10) tokovni generator, dva navadna upornika R , nastavljen upornik R_d , upornik $R(T)$, s katerim merimo zunanjo temperaturo in galvanometer (ampermeter za ugotavljanje toka oz. merjenje majhnih tokov). Upornik R_d nastavimo tako, da ne teče tok skozi galvanometer, torej da je $I_g = 0$. Slednje pogojuje, da je potencial v točkah A in B enak, torej $U_A = U_B$. Potem velja tudi sistem

$$\begin{aligned} RI_1 &= RI_2 \\ R_d I_1 &= R(T) I_2, \end{aligned}$$



Slika 1.10: Wheatstonov mostiček z galvanometrom.

katerega rešitev je $R(T) = R_d$. Nastavljivemu uporniku R_d torej tako spreminjamo upornost, da bo tok skozi galvanometer enak 0. Takrat bo upor zunanjega upornika kar enak upor nastavljivega upornika, odkoder inverzno izračunamo temperaturo. V realnosti pa imamo pri taki vezavi problem. Upornik $R(T)$ se nahaja zunaj, vsi ostali pa nekje v notranjosti. Do upornika $R(T)$ navadno vodita dve dolgi bakreni žici, katerih upornost R_z ni zanemarljiva in je prav tako funkcija temperature. Tako namesto upora $R(T)$ pomerimo upor $R(T) + 2R_z$. Danes zaradi brezžičnega napajanja to ni več problem, v nadaljevanju pa bomo pokazali, kako so problem reševali v preteklosti (4-žilni pristop).

1.5.2 Naloga - upor prek merjenja napetosti v Wheatstonovem mostičku

Obravnavamo nekoliko drugačno vezavo (slika 1.11) - namesto galvanometra imamo voltmetr. Poznamo vrednosti uporov R_1 , R_2 in R_3 . Kolikšen je upor $R(T)$, če nam je znana gonilna napetost U , na voltmetru pa izmerimo napetost V ?

Voltmeter izmeri napetost, ki je enaka razliki potencialov, torej

$$V = U_A - U_B .$$

Zanimajo nas vrednosti teh potencialov. Napetost na zgornji veji mostička je enaka napetosti na spodnji. Zapišemo

$$\begin{aligned} U &= R_1 I_1 + R_3 I_1 \longrightarrow I_1 = \frac{U}{R_1 + R_3} \\ U &= R_2 I_2 + R(T) I_2 \longrightarrow I_2 = \frac{U}{R_2 + R(T)} . \end{aligned}$$

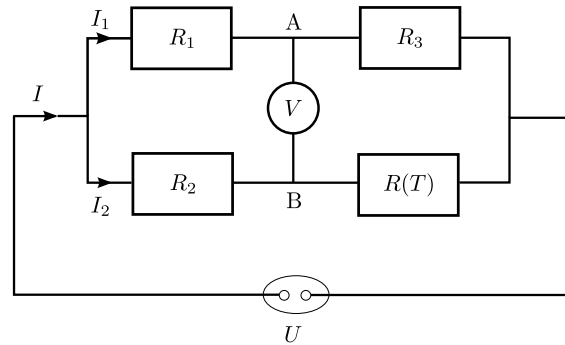
Izračunamo padec napetosti v točkah A in B in končno napetost, ki jo pomeni voltmeter

$$\begin{aligned} U_A &= I_1 R_1 = \frac{U R_1}{R_1 + R_3} \\ U_B &= I_2 R_2 = \frac{U R_2}{R_2 + R(T)} \\ V &= \frac{U R_1}{R_1 + R_3} - \frac{U R_2}{R_2 + R(T)} . \end{aligned}$$

Odtod je torej upor $R(T)$ enak

$$R(T) = \frac{U R_2 R_3 + V R_2 (R_1 + R_3)}{U R_1 - V (R_1 + R_3)} \stackrel{R_1=R_2=R_3=R}{=} R \frac{U + 2V}{U - 2V} .$$

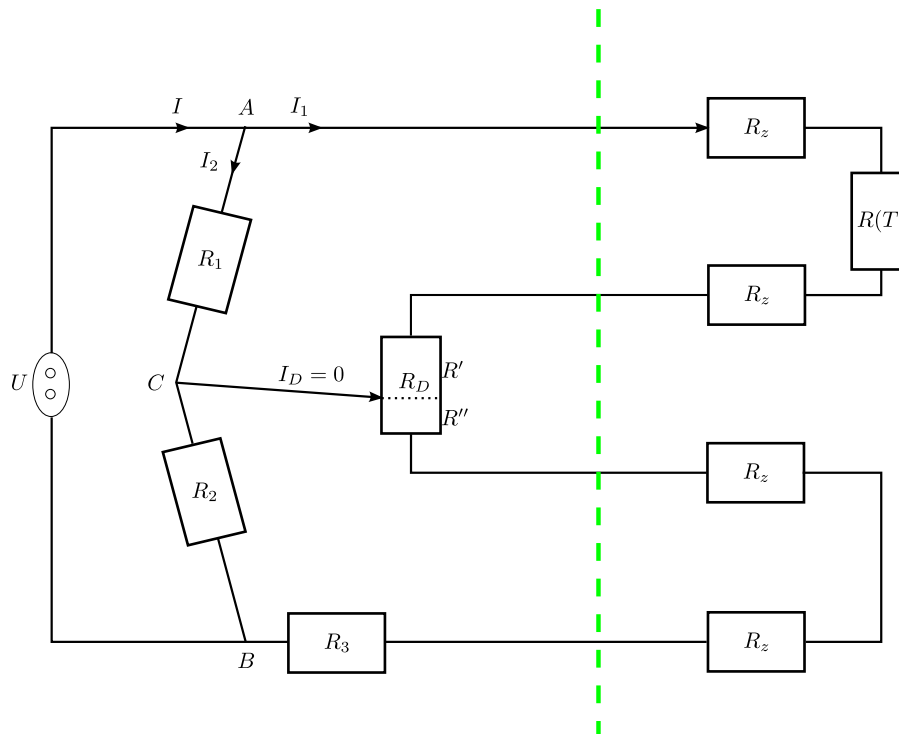
Prek poznavanja U in merjenja V torej izračunamo upor zunanjega upornika $R(T)$ in inverzno temperaturo T .



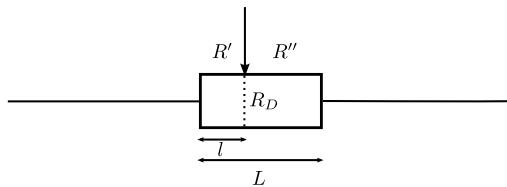
Slika 1.11: Wheatstonov mostiček z voltmetrom.

1.5.3 Naloga - 4-žilni pristop

Izračunaj upor zunanjega upornika $R(T)$ v narisanim vezju (slika 1.12). Dolžine vseh žic, ki vodijo do zunanjega upornika, so enake. Upoštevaj, da drsni upornik (npr. žico s spremenljivo dolžino) nastavimo z zahtevo, da je tok $I_D = 0$. Prek merjenja relativne pozicije l/L (slika 1.13) priključne žice na drsnem uporniku nato izračunamo upor zunanjega upornika. Pri kakšni izbiri upornikov bo impedanca priključnih žic nepomembna?



Slika 1.12: 4-žilna izvedba merjenja temperature zraka. Navpična zelena črta ločuje del vezja, ki se nahaja v notranjosti (kjer je temperatura približno konstantna) od zunanosti, katere temperatura nas zanima.



Slika 1.13: Drsni upornik.

Če je tok $I_D = 0$, potem je padec napetosti U_{AD} enak padcu napetosti U_{AC} , torej

$$I_1(2R_z + R(T) + R') = I_2 R_1 .$$

Prav tako velja, da je padec napetosti U_{BD} enak padcu napetosti U_{BC} , torej

$$I_1(R'' + 2R_z + R_3) = I_2 R_2 .$$

Upoštevamo še, da sta delna upora drsnega upornika enaka

$$R' = \frac{l}{L} R_D , \quad R'' = \frac{L-l}{L} R_D .$$

Iz zgornjega sistema enačb izračunamo

$$R(T) = \frac{R_1}{R_2} (2R_z + R_3 + R_D \frac{L-l}{L}) - 2R_z - R_D \frac{l}{L} .$$

Upora žic se tako še vedno nismo povsem znebili. Pogled na zgornjo relacijo pa razkrije, da se upora žic znebimo s pametno izbiro upornikov, tako da velja $R_1 = R_2$. Vzemimo poseben primer, vrednosti uporov naj bodo $R_1 = R_2 = R_D$, za impedanco zunanjega upornika pa sledi

$$R(T) = R_3 + R_D \frac{L-2l}{L} .$$

Upor žic v zgornji relaciji ne nastopa več, z upornikom R_3 pa poskrbimo, da smo blizu referenčne vrednosti $R_0(T_0)$ (glej odvisnost (1.5.1) zunanjega upornika, torej $R_3 \approx R_0(T_0)$). Tako lahko z večjo ločljivostjo z drsni upornikom R_D merimo spremembo upora kot posledico spremembe temperature.

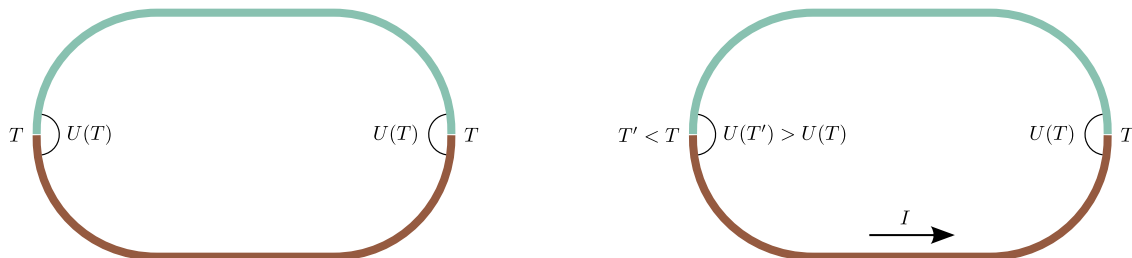
Omenimo še pogost vir napake pri merjenju temperature z uporovnim termometrom. Na uporniku se troši moč $P = I^2 R(T)$. Pri tem se seveda segreva

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q}{\Delta t} &= P \\ mc_p \frac{\Delta T}{\Delta t} &= I^2 R(T) \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{I^2 R(T)}{mc_p} . \end{aligned}$$

Da bi bilo segrevanje čim manjše, torej želimo upornik s čimvečjo maso in čimmanjšo upornostjo. Za upor snovi dolžine l , preseka S in specifične upornosti ζ približno velja $R = \zeta \frac{l}{S}$. To pomeni, da bo za merjenje temperature zraka ustrezala nekoliko debelejša žička, saj bo imela hkrati večjo maso in hkrati večji presek in manjšo upornost.

1.6 Termočlen

Pri dotiku dveh različnih kovin nastane na stiku med njima t.i. kontaktna napetost¹ (glej sliko 1.14). Če imata oba stika kovin enako temperaturo, sta kontaktni napetosti na obeh stikih enaki (čez stike teče enako velik, a nasprotno usmerjen tok) in skupna gonilna napetost je enaka 0.



Slika 1.14: Termočlen. [LEVO] sta temperaturi stikov obeh kovin enaki, [DESNO] pa različni. Posledično steče po vezju električni tok.

Predstavljajmo si sedaj, da kovinsko palico na enem koncu hladimo, na drugem pa grejemo. Zaradi termodifuzije se delci (nosilci naboja) v snovi nekoliko nagnetejo na hladnejši strani in pojavi se termoelektrična napetost med obema koncema palice.

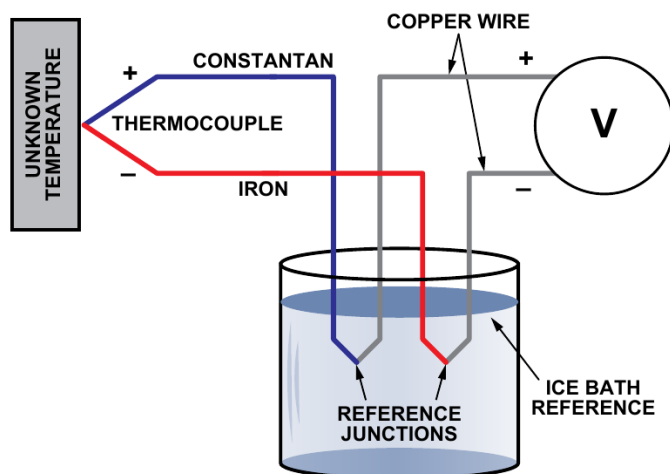
V sklenjenem krogu iz dveh različnih kovin pa je omenjen termodifuzijski pojav različno močan (za posamezno kovino ga izrazimo s koeficientom termične napetosti $S = -\Delta U / \Delta T$). Če na enem stiku kovini grejemo (temperatura T), na drugem pa hladimo ($T' < T$), bo gostota elektronov v obeh kovinah pri hladnejšem stiku večja. Posledično bo tudi kontaktna napetost pri hladnejšem stiku večja, torej $U(T') > U(T)$. Po kovini tako steče električni tok. Z voltmetrom bi torej v sklenjenem krogu iz dveh kovin pomerili napetost

$$V = U(T') - U(T) = S(T - T') .$$

Opisanemu termoelektričnemu pojavu pravimo Seebeckov efekt.

Praktična izvedba termočlena je prikazana na sliki 1.15. Merjenje temperature s termočleni ima nekatere pomembne prednosti: termočleni so majhni, se ne grejejo, imajo izjemno široko temperaturno območje (uporabno predvsem za industrijske namene, ne toliko za merjenje temperature v atmosferi), so izjemno majhni z nizko časovno konstanto ($\tau = 0.1$ s). Njihove slabosti pa so: korozivnost kovin, električni šum, ki ga inducirajo že male električne naprave v okolici (spreminjanje napetosti s temperaturo je namreč izjemno majhno, reda velikosti $10 \mu\text{V K}^{-1}$), potrebno pogosto umerjanje.

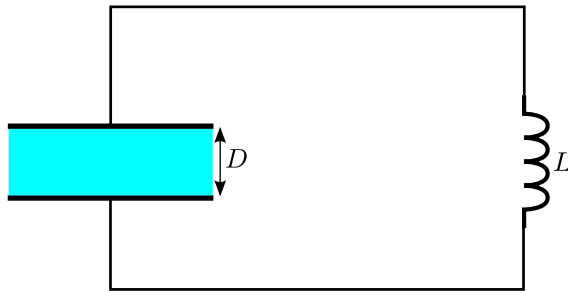
¹Zakaj kontaktna napetost? Kovini imata različni vrednosti izstopnega dela, t.j. najmanjše potrebne energije (nekaj eV), ki jo potrebuje elektron, da lahko zapusti kovino in preide v vakuum, ki jo obdaja. Večje kot je izstopno delo, težje torej elektron zapusti to kovino. Elektroni na stiku kovin se gibljejo v smeri proti kovini, katere izstopno delo je večje, torej proti kovini, v kateri bodo zavzeli nižje energijske vrednosti. To ustvari električni tok zaradi premikanja nosilcev naboja (ang. *drift current*), ki je temperaturno odvisen.



Slika 1.15: Shema praktične izvedbe termočlena. Namesto ledene kopeli (pri točno 273.16 K) referenčno temperaturo pomerimo npr. z uporovnim termometrom (vir: [5]).

1.7 Električni nihajni krog

V tokokrog zaporedno vežemo tuljavo z induktivnostjo L in kondenzator s temperaturno odvisno kapaciteto $C(T)$ (slika 1.16). Slednjega na začetku nabijemo na neko začetno napetost U_0 , nato pa izvor napetosti umaknemo. Prostor med ploščama kondenzatorja s površino S izpopolnimo s snovjo z linearnim koeficientom raztezka α in dielektričnostjo ε . Razdalja med ploščama kondenzatorja pri temperaturi T je enaka D . Kako se spremeni frekvenca tega električnega nihajnega kroga, če povečamo temperaturo za ΔT ?



Slika 1.16: Merjenje temperature s frekvenco nihajnega kroga.

Vsota napetosti v električnem nihajnem krogu je po Kirchhoffovem zakonu

$$\begin{aligned} U_L + U_C &= -L \frac{dI}{dt} - \frac{e}{C} = 0 \quad / \frac{d}{dt} \\ &= \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0 . \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je tok skozi kondenzator enak $I = \frac{de}{dt}$. Ker sta kondenzator in tuljavo vezana zaporedno, je seveda tok skozi kondenzator enak toku skozi tuljavo. Električni tok I kot rešitev zgornje DE 2. reda niha kot

$$I = I_0 \sin \omega t , \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

S sinusno rešitvijo za tok hkrati že zadostimo začetnemu pogoju, da je napetost na kondenzatorju $U_C(t=0) = 0$. Poiščimo še amplitudo nihanja električnega toka I_0 . Velja

$$\begin{aligned} e &= -CU_C \quad \frac{d}{dt} \\ I &= -C \frac{dU_C}{dt} \end{aligned}$$

in od tod z integracijo

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t) .$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja torej poiščemo amplitudo toka I_0

$$U_C(t=0) = U_0 = \frac{I_0}{C\omega} = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \longrightarrow I_0 = U_0 \sqrt{\frac{L}{C}} . \quad (1.7.1)$$

Vemo, da se kapaciteta kondenzatorja spreminja s temperaturo, saj je v njem dielektrik, kateremu se spreminja dolžina v smeri pravokotno na plošči kondenzatorja. Kapaciteta kondenzatorja je temperaturno odvisna in je enaka

$$C(T) = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{D(T)} .$$

Potem je sprememba kapacitete kot posledica spremembe temperature enaka

$$\begin{aligned}dC &= -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{D^2} dD \\&= -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{D^2} D\alpha dT \\&= -C\alpha dT .\end{aligned}$$

Sprememba frekvence s spremembo temperature pa izrazimo takole

$$\begin{aligned}d\omega &= -\frac{1}{2}\omega \frac{dC}{C} \\&= \frac{1}{2}\omega\alpha dT .\end{aligned}$$

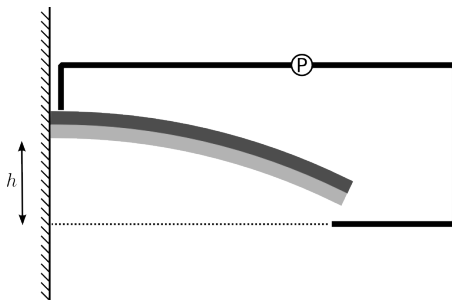
1.8 Dodatne naloge za vajo

1.8.1

Dodatno vprašanje k nalogi (1.3.4): za koliko se časovna konstanta spremeni, če upoštevam, da difuzija ne poteka preko dela bučke, ki je povezan s kapilaro.

1.8.2

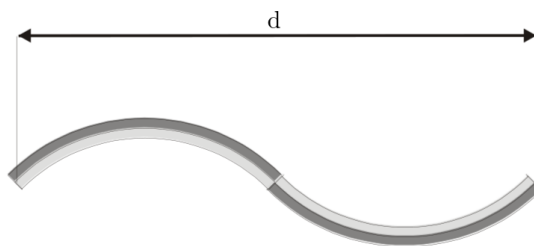
Bimetalni trak se pogosto uporablja v termostatih. Z njim reguliramo ogrevanje in hlajenje prostorov. Bimetalni trak dolžine 4 cm je na levem koncu nepremično vpet (kot kaže slika 1.17). Sestavljata ga dve kovini - vsaka debeline 0.2 mm. Zgornji del traku sestavlja kovina z linearnim koeficientom raztezka $\alpha_2 = 1.7 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, spodnji del pa kovina s koeficientom $\alpha_1 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Pri referenčni temperaturi 25°C je bimetalni trak povsem raven. Priključna žica, preko katere steče električni tok za vklop ogrevanja, se nahaja $h = 3 \text{ mm}$ pod bimetalnim trakom. Ali se pri temperaturi 15°C že vklopi gretje? DODATNO VPRAŠANJE (TEŽJE): pri kateri temperaturi pa se vklopi gretje?



Slika 1.17: Bimetalni termostat.

1.8.3

Termometer sestavljata dva tanka bimetalna termometra, ki sta zvarjena skupaj (glej sliko 1.18). Namesto spremembe kota merimo dolžino d , prek katere izračunamo temperaturo. Pri temperaturi 10°C je bimetalni trak raven. Razdalja d od enega do drugega konca traku je pri tej temperaturi 20 cm. Linearna koeficienta raztezka kovin sta $\alpha_1 = 0.004 \text{ K}^{-1}$ in $\alpha_2 = 0.008 \text{ K}^{-1}$. Skupna debelina trakov je 0.5 cm. Kolikšna je dolžina d , če je temperatura 20°C ?



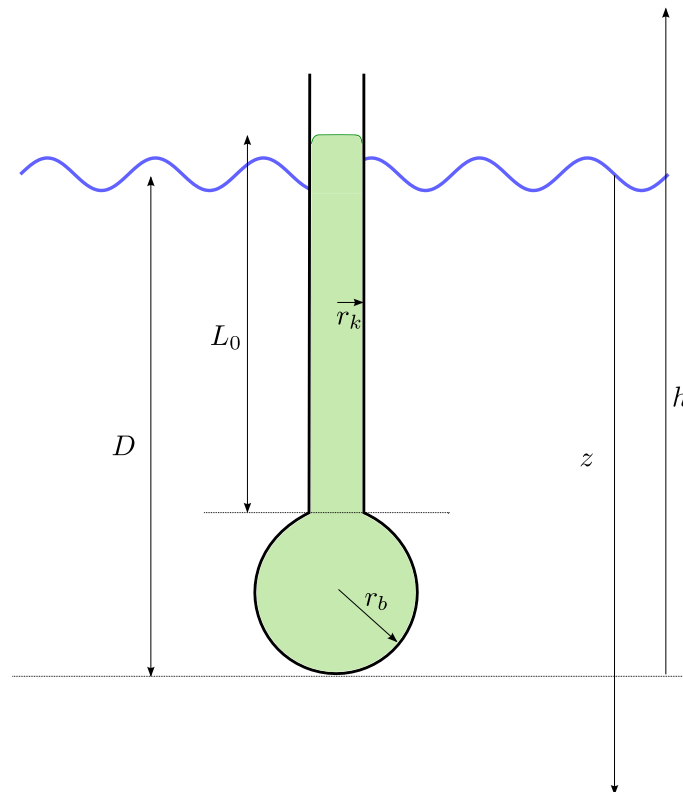
Slika 1.18: Zvarjena bimetalna termometra.

1.8.4

Platinasti uporovni termometer je umerjen tako, da ima pri 20°C upornost $110\,\Omega$, pri 0°C pa $100\,\Omega$.

1. Kolikšna bo upornost termometra pri temperaturi -15°C ?
2. Kolikšna je lahko največja napaka (občutljivost) merilnika upora, če želimo pri temperaturi 10°C doseči natančnost merjenja temperature na 0.1°C ?

1.8.5



Slika 1.19: Alkoholni termometer v stratificirani tekočini.

Alkoholni termometer je sestavljen iz bučke in kapilare (slika 1.19). Kapilara ni izolirana (napačna izvedba), zato privzamemo, da je prevajanje toplote po celotni površini termometra konstantno. Pri neki temperaturi T_0 je višina stolpca alkohola v kapilari enaka L_0 . Potem termometer potopimo v stratificirano tekočino, katere temperatura pada z globino kot $T(z) = T_p - kz$, kjer je T_p temperatura vode na površini in z globina, koeficient $k > 0$. Dno bučke se nahaja D pod gladino vode. Polmer bučke je r_b , polmer kapilare pa r_k . Upoštevaj, da je temperatura kapljevine v delu termometra na globini z po dolgem času enaka temperaturi vode na globini z , torej $T(z)$. Za koliko se spremeni višina stolpca alkohola v termometru? Kolikšen je dvig tekočine zaradi alkohola v kapilari? Kaj pa, če debelino kapilare razpolovimo?

Uporabi naslednje podatke: $\beta_{AL} = 1.49 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $T_0 = 22^\circ\text{C}$, $T_p = 40^\circ\text{C}$, $k = 20 \text{ K m}^{-1}$, $d = 0.5 \text{ m}$, $r_b = 1 \text{ cm}$, $r_k = 0.2 \text{ mm}$. Namig: za lažje računanje transformiraj spreminjanje temperature z globino v spreminjanje temperature z višino h , pri čemer izbereš koordinatno izhodišče pri dnu bučke.

1.8.6

Ob nevihtnem pišu oz. talni nevihtni fronti se lahko plitvi spodnji sloj atmosfere (nekaj 100 metrov) izjemno hitro ohladi. Upoštevajmo, da se ozračje v 10 sekundah linearno ohladi s 30 na 26°C. Kolikšno temperaturo bo pokazal 15 sekund po začetku ohlajanja termometer s časovno konstanto 20 sekund, kolikšno pa tisti s časovno konstanto 5 sekund? Pred nevihtnim pišem sta bili temperatura termometra in temperatura zraka poravnani. Potek ohladitve v času in potek izmerjene temperature v času tudi skiciraj!

Poglavje 2

Merjenje pritiska

2.1 Uvod

Atmosferski pritisk je teža stolpca zraka nad horizontalno projekcijo površja

$$p = \int_0^\infty g(z)\rho(z)dz$$

Stolpec se v navpični smeri razteza vse do zunanjšega “roba” atmosfere, kjer je $p \approx 0$. Merimo lahko dejanski pritisk $p = F/S$, $[p] = \text{Pa} = \text{N m}^{-2}$, trend pritiska $p(t)$ oz. lokalno časovno tendenco $\partial p/\partial t$. Atmosferski pritisk običajno izražamo v milibarjih (mbar) ali hektopaskalih (hPa), pri čemer velja $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$.

Skala na meteroloških inštrumentih mora biti umerjena tako, da pokaže pravo vrednost pritiska v standardnih enotah, kadar celoten inštrument držimo pri 0°C in standardni vrednosti gravitacijskega pospeška $g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$. Svetovna meteorološka organizacija (WMO) zahteva, da je merilno območje inštrumentov $p \in [500, 1080] \text{ hPa}$, njihova natančnost 0.1 hPa (torej je relativna natančnost pri tipični vrednosti pritiska 1000 hPa približno enaka 10^{-4}), časovna konstanta senzorjev $\tau = 10 \text{ s}$, povprečevanje meritev pa mora trajata 1 minuto .

Pri nekaterih barometrih skala ni v hPa, temveč v mm Hg, pri čemer 760 mm stolpec živosrebrne tekočine (Hg) ustreza zračnemu pritisku 1013.25 hPa , torej vrednosti na povprečni gladini morja v standardni atmosferi (ISA).

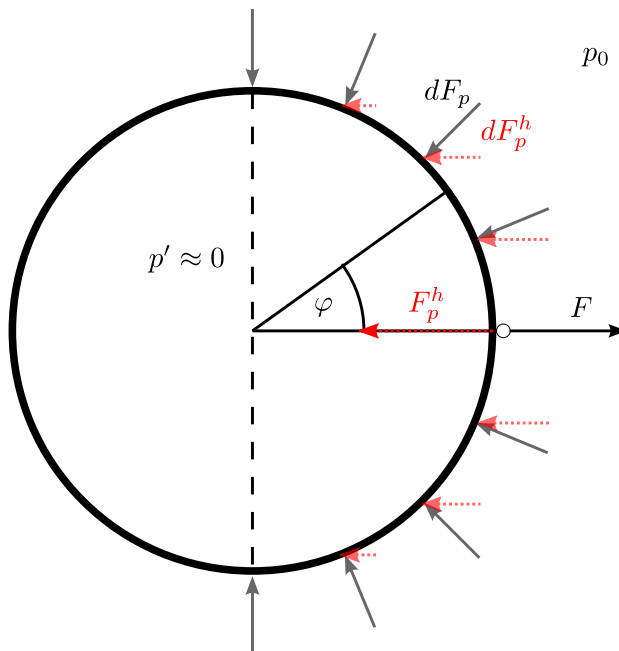
Ločimo direktne in indirektne načine merjenja atmosferskega pritiska. Pri prvih dejansko merimo silo, ki jo povzroča stolpec zraka v atmosferi na merilno napravo. Tak način merjenja uporabljajo kapljevinski, npr. živosrebrni barometri, in aneroidni barometri. Indirektno pa pritisk pomerimo s hipsometrom, pri čemer dejansko merimo temperaturo vrelišča tekočine, za katero pa vemo, da je neposredno odvisna od atmosferskega pritiska.

2.1.1 Naloga - sila atmosferskega pritiska

Imamo dve volti polkrogli z radijem R . Polkrogli neprodušno staknemo in izsesamo iz sfere zrak, tako da je v notranjosti $p' \approx 0$. Kolikšna sila je potrebna, da krogle ločimo?¹

Poglejmo najprej silo zračnega pritiska na sfero. Ta deluje povsod pravokotno (radialno)

¹Poskus je prvi pokazal l. 1654 župan Magdeburga Otto von Guericke, ki se je poleg politike ukvarjal tudi z znanostjo. S poskusom je dokazal veljakom, kako ogromna je sila atmosfere. Po pričevanjih krogle s premerom pol metra ni moglo razstaviti niti 30 konj v dveh ekipah po 15, ki so vlekli vsaksebi. Ni pa jasno, kako dobro, torej do katere vrednosti pritiska, je s svojo pripravo uspel izsesati zrak iz staknjenih polkrogel.



Slika 2.1: Polkrogli, ki ju staknemo in iz njiju izsesamo zrak.

na površino sfere (glej sliko 2.1) in je za vsak diferencialno majhen del površine enaka

$$dF_p = (p_0 - p')dS = p_0 dS .$$

Obravnavajmo sedaj primer s polkroglo, pritisnjeno na ravno ploščo. Da polkroglo odlepimo od plošče, jo moramo vleči najmanj s silo F , ki je po velikosti enaka vsoti horizontalne projekcije sile pritiska po celotni površini polkrogle:

$$\begin{aligned} F_p^h &= \int dF_p^h = \int dF_p \cos \varphi \cos \lambda \\ &= \iint_S p_0 dS \cos \varphi \cos \lambda . \end{aligned}$$

Površinski element dS je v sferičnih koordinatah pri naši izbiri koordinatnega sistema enak

$$dS = R \cos \varphi d\lambda R d\varphi .$$

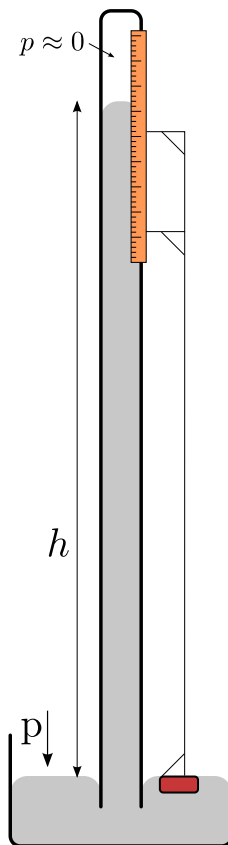
Horizontalna sila, s katero deluje atmosferski pritisk na polkroglo, je torej

$$\begin{aligned} F_p^h &= p_0 R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \lambda d\lambda \\ &= p_0 R^2 \frac{\pi}{2} 2 = p_0 \pi R^2 . \end{aligned}$$

Na drugo polkroglo deluje povsem enaka sila pritiska. Če želimo torej polkrogli razstaviti, moramo na vsako polkroglo delovati z enako veliko a nasprotno silo najmanj $F_p^h = p_0 \pi R^2$. Če imamo kroglo na enem koncu vpeto, pa je potrebna sila najmanj $2F_p^h = 2p_0 \pi R^2$, Pri krogli z radijem 0.25 m je ta sila velika približno 40 000 N.

2.2 Živosrebrni barometer

Dolgo znan in zanesljiv način merjenja atmosferskega pritiska je z živosrebrnim barometrom. Zaradi lažjega odčitvanja in zaradi strupene pare ga danes izpodrivajo druge vrste barometrov - aneroidni, elektronski in drugi kapljevinski (npr. z ionskimi tekočinami, katerih para je nestrupena, imajo pa pogosto še celo bolj uporabne fizikalne lastnosti - večji volumski raztezek).



Slika 2.2: Živosrebrni barometer. Na desni strani kapilare je plavač, na katerega je pritrjeno merilo, iz katerega odčitamo višino stolpca živega srebra.

Zgodovinsko se je uporabljalo živo srebro, saj:

- ima dovolj veliko gostoto ($\rho_{\text{Hg}} = 13\,959 \text{ kg m}^{-3}$), zato ne potrebujemo zelo dolge cevke,
- gostota živega srebra je linearno odvisna od temperature,
- ne omoči stekla,
- je v tekoči obliki v območju $T \in [-38.57, 356.58] \text{ }^\circ\text{C}$,
- njegova para ima nizek pritisk 0.021 Pa pri $0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Princip delovanja živosrebrnega barometra je prikazan na sliki 2.2. Pritisk, ki ga povzroča stolpec zraka na živosrebrno kapljevino, je enak pritisku, ki ga povzroča pritisk ustrezno visokega stolpca živosrebrne kapljevine v kapilari, torej

$$p = p_{\text{Hg}} = \rho_{\text{Hg}} g h ,$$

kjer je gostota živega srebra $\rho_{\text{Hg}} = 13\,595.1 \text{ kg m}^{-3}$ pri $T = 0^\circ\text{C}$. Nujni pogoj za natančno izmero pritiska je torej natančno poznavanje ρ_{Hg} , g in h . V linearnem približku relativne natančnosti velja

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h},$$

kar pomeni, da morajo biti ob zahtevani relativni natančnosti pritiska $dp/p \approx 10^{-4}$ tudi relativne napake drugih členov manjše od 10^{-4} .

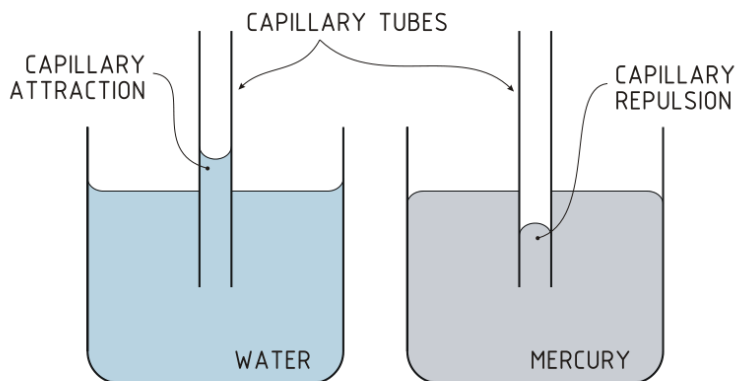
Naštejmo še nekaj najpogostejših razlogov za napačne meritve z živosrebrnimi barometri:

- Raztezanje Hg kapljevine, stekla in merilne skale z naraščanjem temperature (lahko kompenziramo s hkratnim merjenjem temperature).
- Izmerjen pritisk je odvisen od lokalne vrednosti gravitacijskega pospeška.
- Prisotnost plina v zaprtem delu kapilare (glej sliko 2.2 zgoraj) povzroči napako (saj ni popoln vakuum - deloma zaradi hlapenja tekoče Hg, dokler prostor nad njo ne doseže nasičenosti, deloma ker je težko popolnoma izsesati zrak).
- Zaradi površinske napetosti se stolpec živega srebra v kapilari ne dvigne dovolj (kapilarni spust).
- Vpliv dinamičnega pritiska zaradi vetra. Posledično želimo barometer čimbolj zaščititi pred vplivi vetra.
- Nagnjenost barometra.

Nekaj vplivov teh napak si bomo tudi fizikalno razložili z nalogami v nadaljevanju. Tudi če je meritev povsem točna, pa ni nujno reprezentativna za neko območje. Meritev je nereprezentativna, kadar je lokalno nad barometrom "jezero" težkega hladnega zraka z večjo gostoto, zato je zračni pritisk, ki ga izmeri barometer, višji od dejanskega okoliškega.

2.2.1 Naloga - kapilarni spust

Kolikšen je spust živosrebrne kapljevine v kapilari s polmerom $r = 2.5 \text{ mm}$? Površinska napetost živega srebra pri $T = 15^\circ\text{C}$ je $\gamma = 487 \text{ mN m}^{-1}$. Mejni kot je $\theta_m = 140^\circ$, živo srebro torej ne omoči stene steklene posode. Gostota živega srebra je $13\,959 \text{ kg m}^{-3}$.



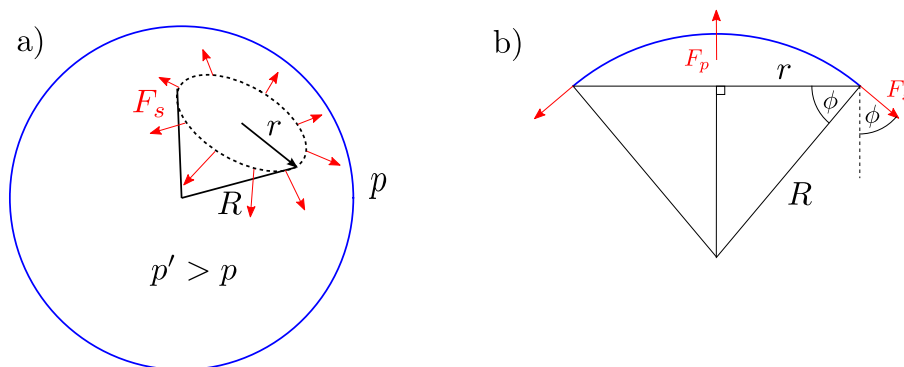
Slika 2.3: Kapilarni dvig vode in kapilarni spust živega srebra (vir: *chemwiki.ucdavis.edu*).

Spust živosrebrne kapljevine v kapilari oz. dvig vode v kapilari je posledica adhezijskih in kohezijskih sil (glej sliko 2.3). Prve delujejo med različnimi molekulami (npr. molekulami v steklu in molekulami v kapljevini), druge pa med enakimi molekulami. Pri živem srebru so kohezijske sile močnejše od adhezijskih med živim srebrom in steklom, zato se ob robu posode meniskus živega srebra premakne proč od stene posode proti sredini (stene ne omoči). Nasprotno pa so pri vodi kohezijske sile šibkejše od adhezijskih med vodo in steklom, zato se meniskus vode dvigne po steni posode navzgor (omoči steno). Če je posoda ozka in so stene blizu skupaj - kot v kapilari, potem spust/dvig kapljevine ni opazen zgolj ob robu stene, temveč po celotnem horizontalnem preseku kapilare. Spust/dvig kapljevine je obratno sorazmeren s premerom kapilare.

Kohezijskim in adhezijskim silam, ki se pojavljajo med posameznimi molekulami, v makroskopskem svetu rečemo sila površinske napetosti. Ta je na meji med dvema snovema v splošnem sorazmerna z dolžino njune meje, torej

$$F_s = \gamma b ,$$

kjer je b dolžina njune meje, γ pa empirično ugotovljen koeficient površinske napetosti. Preprost eksperiment za izmero koeficienta površinske napetosti lahko izvedemo z milnično opno, napeto na pravokoten okvirček z eno prosto stranico, ki skoraj brez trenja drsi po podlagi.



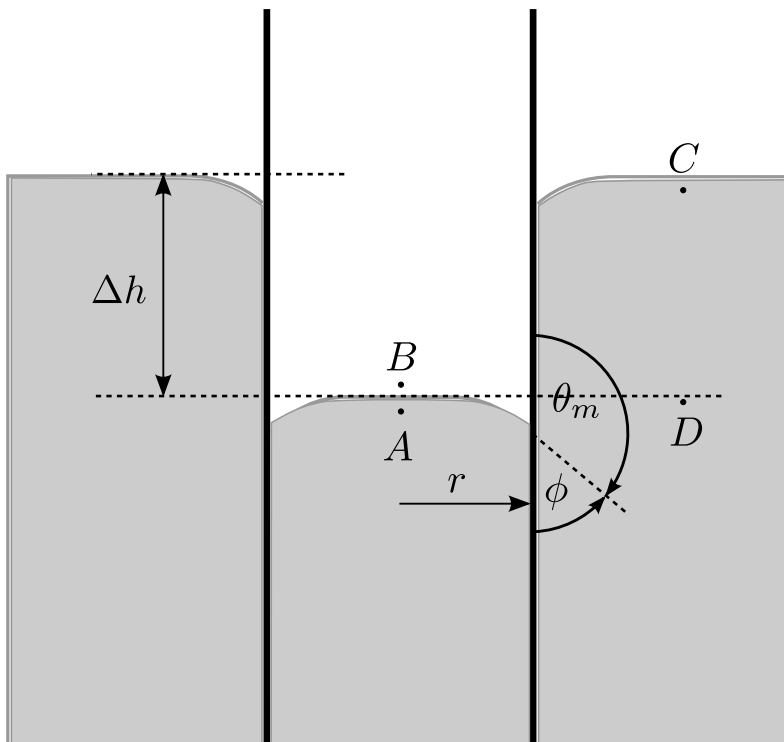
Slika 2.4: Sila površinske napetosti na sferični lok na površini krogelne kapljice vode.

Vrnimo se k našemu primeru. Če je pritisk na nasprotnih straneh opne različen, se opna upogne (v smeri nižjega pritiska). Tudi v živosrebrnem barometru je pritisk na zgornji in spodnji strani kapljevine v kapilari različen - nižji je seveda na zgornji. Predpostavimo najpreprostejšo rešitev - meniskus v kapilari se oblikuje kot sferični lok (kupola). Poglejmo, kakšno je ravnovesje sil v sferičnem loku na površini kapljice vode, torej na sferični gladini, ki predstavlja mejo voda-zrak (slika 2.4). Zapišemo ravnovesje v navpični smeri

$$\begin{aligned} F_p - F_s \cos \phi &= 0 \\ (p' - p)\pi r^2 - \gamma 2\pi r \cos \phi &= 0 \\ p' - p &= \frac{2\gamma \cos \phi}{r} . \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je obseg sferičnega loka enak $2\pi r$. Sila pritiska je po celotni površini loka pravokotna na njegovo površino. Ker nas zanima zgolj navpična projekcija sile pritiska, za površino S vzamemo kar projekcijo površine sferičnega loka na horizontalno ploskev (πr^2), nad katero je lok napet.

To znanje uporabimo sedaj pri izračunu višine kapilarnega spusta. S pomočjo slike 2.5 pogledjmo, kakšen je tlak v delih kapljevine. V točki B je tlak enak zunanjemu zračnemu tlaku p , ravno tako v točki C. V točki D je tlak povišan za toliko, kolikor je teža stolpca



Slika 2.5: Kapilarni spust živega srebra.

živega srebra nad to točko, torej $p + \rho_{\text{Hg}} g \Delta h$. V točki A je tlak večji kot v točki B zaradi površinske napetosti in je enak $p + 2\gamma \cos \phi / r$. Prav tako je tlak v točki A enak tlaku v točki D, saj se točki nahajata na isti višini v kapljevini. Velja torej

$$\begin{aligned} p_A &= p_D \\ p + \frac{2\gamma \cos \phi}{r} &= p + \rho_{\text{Hg}} g \Delta h \\ \Delta h &= \frac{2\gamma \cos \phi}{\rho_{\text{Hg}} g r} = 2.2 \text{ mm} . \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je kot $\phi = 180^\circ - \theta_m = 40^\circ$. V 5 mm debeli kapilari se torej živo srebro zaradi površinske napetosti spusti za 2.2 mm. V 760 mm stolpcu Hg, ki ustreza pritisku 1013.25 hPa je napaka pritiska zaradi kapilarnega spusta enaka

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\Delta h}{h} p \\ &= \frac{-2.2 \text{ mm}}{760 \text{ mm}} 1013.25 \text{ hPa} = -2.93 \text{ hPa} . \end{aligned}$$

Napaka je torej precejšnja, zato jo je potrebno kompenzirati s skalo na barometru.

2.2.2 Naloga - živosrebrna para

Izračunaj parni tlak živosrebrne pare nad kapljevino v zaprtem delu kapilare pri temperaturi 100°C in pri 60°C . Latentna izparilna toplota Hg je $0.3 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$, njegova molska masa pa $M = 200.6 \text{ kg kmol}^{-1}$. Pri 0°C je nasičen parni tlak enak 0.02 Pa .

Nasičen parni tlak živega srebra izračunamo s pomočjo Clausius-Clapeyronove enačbe

$$\frac{de}{e} = \frac{L}{R_{\text{Hg}}} \frac{dT}{T^2} .$$

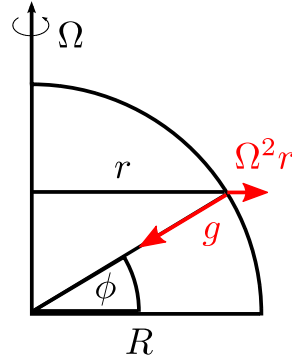
Z integracijo enačbe v mejah od e_{s0} do e_s in od T_0 do T dobimo sledeč izraz

$$e_s(T) = e_{s0}(T_0 = 273 \text{ K}) \exp \left[\frac{L}{R_{Hg}} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right],$$

kjer je $R_{Hg} = R/M_{Hg} = 41.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Nasičen parni tlak Hg pare nad Hg kapljevino je pri 60°C je 0.02 hPa , pri 100°C pa 0.25 hPa . Pri merjenju pritiska na Zemlji (s temperaturnim območjem $T \in [-90, 60]^\circ\text{C}$) je torej napaka zanemarljiva.

2.2.3 Naloga - vpliv težnostnega pospeška na pritisk, izmerjen s Hg barometrom

Kolikšen je efektivni težnostni pospešek na geografski širini $\phi = 7^\circ\text{N}$ na višini $h = 2000 \text{ m}$? Kakšna bo napaka izmerjenega pritiska, če ne upoštevamo lokacijskega popravka težnostnega pospeška? Standardna vrednost gravitacijskega pospeška na geografski širini $\phi_0 = 45^\circ$ in povprečni višini gladine morja (MSL) je $g_0 = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$. Privzemi, da je Zemlja popolna sfera, njen radij pa je 6371 km .



Slika 2.6: Skica.

Najprej izračunajmo efektivni težnostni pospešek na polu (slika 2.6). Ta je seveda večji kot na na geografski širini 45° , saj je (sistemska) centrifugalna sila manjša. Zapišemo

$$g_{pol} = g_0 + \Omega^2 r_{45} \cos 45 = 9.82350 \text{ m s}^{-2},$$

kjer je $r_\phi = R \cos \phi$. Nato izračunamo težnostni pospešek na 7°N kot

$$\begin{aligned} g_7 &= g_{pol} - \Omega^2 r_7 \cos 7 \\ &= g_0 - \Omega^2 R (\cos^2 7 - \cos^2 45) \\ &= 9.79030 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

Pri izračunu smo upoštevali za vrednost krožne frekvence $\Omega = 2\pi/86400 \text{ s}^{-1}$.

Sedaj upoštevamo še popravek zaradi višine nad povprečno gladino morja. Težnostno polje, ki ga ustvarja Zemlja okoli sebe je enako $\vec{g} = -GM|\vec{k}|/R^2$. Njegova velikost je torej enaka $g(R) = -GM/R^2$. Velikost težnostnega pospeška na višini h pa je enaka

$$\begin{aligned} g(R+h) &= -\frac{GM}{(R+h)^2} \\ &= -\frac{GM}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2} \\ &= g(R) \frac{R^2}{(R+h)^2}. \end{aligned}$$

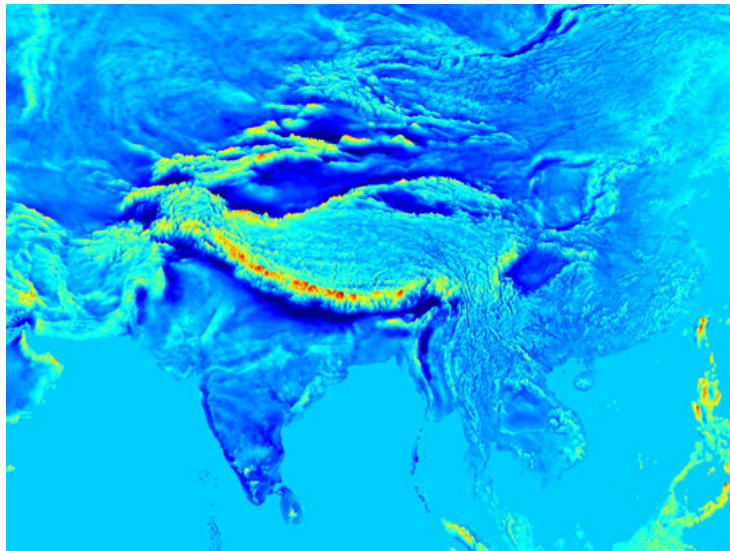
Odtod izračunamo težnostni pospešek na višini $h = 2000$ m. Zapišemo

$$g_7(2000 \text{ m}) = 9.79030 \text{ m s}^{-2} \frac{6371^2}{(6371 + 2)^2} = 9.78416 \text{ m s}^{-2}.$$

Izračunajmo sedaj težnostni pospešek na isti lokaciji še po standardni korekcijski formuli, ki upošteva tudi popravek zaradi nepopolne sferičnosti Zemlje (prav s privzetkom o sferičnosti smo napravili največjo napako)

$$\begin{aligned} g &= \left(9.80616 \cdot (1 - 2.6373 \cdot 10^{-3} \cos(2\phi) + 5.9 \cdot 10^{-6} \cos^2(2\phi)) \right) - 3.086 \cdot 10^{-6} h \\ &= 9.77495 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned}$$

Omenimo še zanimivost: najvišja izmerekna vrednost težnostnega pospeška je enaka 9.84 m s^{-2} , izmerjena na Arktiki, najnižja vrednost, izmerjena v Andih (Peru, tik ob ekvatorju) pa je 9.76 m s^{-2} . To seveda pomeni, da bi tehtnica pri osebi z maso 100 kg v teh krajih pokazala za kar 800 g različni teži.



Slika 2.7: Satelitsko izmerjene variacije težnostnega pospeška v Aziji. Rdeči toni ustrezajo nizkim vrednostim, modri pa visokim vrednostim (vir: geodesy.curtin.edu.au).

2.2.4 Naloga - nagnjen barometer

Cev živosrebrnega barometra je nagnjena glede na navpičnico za $\varphi = 10^\circ$. Kolikšna je relativna napaka tako izmerjenega pritiska? Kolikšna je absolutna napaka, če je zunanji pritisk 1000 hPa ?

Če je cev barometra nagnjena, pomerimo razliko v višini stolpcev Hg h' namesto h , kot bi pomerili, če bi bil barometer postavljen navpično, pri čemer velja $h' = h / \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} \Delta p &= p' - p = \rho_{\text{Hg}} g \Delta h \\ &= \rho_{\text{Hg}} g (h' - h) \\ &= \rho_{\text{Hg}} g h \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right). \end{aligned}$$

Relativna napaka izmerjnega pritiska je torej

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\cos \varphi} - 1 = 0.015 = 1.5\% .$$

Pri atmosferskem pritisku 1000 hPa je torej zaradi za 10 stopinj nagnjenega barometra odčitani pritisk za 15 hPa večji od dejanskega. Rezultat veleva, da morajo biti živosrebrni barometri postavljeni skoraj povsem navpično, da zadostimo zahtevani natančnosti pri merjenju zračnega pritiska (0.1 hPa).

2.2.5 Naloga - vpliv vetra

Z barometrom želimo pomeriti zračni pritisk. Za koliko se izmerjen pritisk razlikuje od dejanskega zračnega pritiska, če piha preko barometra veter s hitrostjo 10 m s^{-1} ? Gostota zraka naj bo 1 kg m^{-3} .

Če se poveča hitrost tekočine (oz. tok zraka), se lokalno zmanjša pritisk v njej. Posledica tega dejstva (preprosto pa ga preizkusite tako, da pihnete med dva lista papirja in opazujete, kaj se bo zgodilo), ki ga je prvi opisal Bernoulli je, da je izmerjen zračni pritisk nekoliko nižji od dejanskega. Naj bo p' izmerjen zračni pritisk (statični pritisk), p pa dejanski pritisk zraka v primeru brezvetrja. Potem velja

$$p = p' + \frac{1}{2}\rho v^2 ,$$

Razlika torej nastane zaradi dinamičnega pritiska in je enaka

$$\Delta p = p' - p = -\frac{1}{2}\rho v^2 = -0.5 \text{ hPa} .$$

Z barometrom, prek katerega piha veter, torej izmerimo prenizek pritisk.

2.2.6 Naloga - redukcija pritiska na morski nivo

Na postaji Ljubljana Bežigrad na nadmorski višini 299 m so izmerili pritisk 970 hPa. Kolikšen je zračni pritisk, reduciran na nivo morske gladine?

V atmosferi spremembo pritiska s spremembo višine izrazimo preprosto kot

$$dp = -\rho g dz = -\frac{p}{R_d T} g dz ,$$

kjer smo gostoto izrazili s tlakom in temperaturo ob upoštevanju enačbe stanja idealnega plina. Pri tem je specifična plinska konstanta suhega zraka $R_d = 287.05 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, težnostni pospešek pa 9.80665 m s^{-2} . Predpostavimo, da je sprememba temperature z višino takšna kot v povprečni atmosferi, torej $\langle \partial T / \partial z \rangle = -6.5 \text{ K km}^{-1}$ in povprečna temperatura na morski gladini $T_{00} = 288.15 \text{ K}$. V enačbi upoštevamo še potek temperature od višine postaje do morske gladine in končno integriramo

$$\int_{p_0(z_0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T_0 + \langle \frac{\partial T}{\partial z} \rangle (z - z_0)} .$$

Integral najlažje rešimo z uvedbo nove spremenljivke, tako da izraz v imenovalcu na desni strani enačaja zapišemo kot $az + b = d$. Po izračunu integrala lahko izrazimo pritisk p_0 na gladini morja z_0 s pritiskom p na višini z

$$p_0(z_0) = p(z) \left(\frac{T_0}{T_0 + \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle (z - z_0)} \right)^{-\frac{g}{R_d \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle}} = p(z) \left(\frac{T(z) - \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle (z - z_0)}{T(z)} \right)^{-\frac{g}{R_d \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle}}.$$

Upoštevali smo standardni potek temperature z višino, zato je smiselno, da tudi $T(z)$ izrazimo s temperaturo, ki bi jo imel zrak na pritiskovi ploskvi 970 hPa v standardni atmosferi. Velja

$$T(z) = T_{00} \left(\frac{p(z)}{p_{00}} \right)^{-\frac{R_d \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle}{g}},$$

kjer je standardni zračni tlak na nivoju morja $p_{00} = 1013.25$ hPa. Končen izraz za pritisk, reduciran na nivo morja, je torej

$$p_0(z_0) = p(z) \left(1 - \frac{\left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle z}{T_{00} \left(\frac{p(z)}{p_{00}} \right)^{-\frac{R_d \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle}{g}}} \right)^{-\frac{g}{R_d \left\langle \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle}}.$$

Za naše podatke je torej v Ljubljani pritisk, reduciran na nivo morja, enak 1005.2 hPa.

2.2.7 Naloga - vpliv napačno izmerjenega pritiska na izračun vetra

Zakaj želimo meriti zračni pritisk na 0.1 hPa natančno? Kakšna bo potem absolutna napaka izračuna vetra v zmernih geografskih širinah pri 45°N. Privzemi, da je veter geostrofski. V točkah, ki sta po poldnevniku narazen za $\Delta y = 100$ km in na isti nadmorski višini, pomerimo pritiska $p_1 = 856$ hPa ± 0.1 hPa in $p_2 = 854.6$ hPa ± 0.1 hPa. Gostota zraka je 1 kg m^{-3} .

Geostrofski veter je teoretični veter, ki je posledica ravnovesja med silo horizontalnega gradienta pritiska in sistemsko Coriolisovo silo, ki jo občutijo telesa na Zemlji zaradi vrtenja planeta. Veter v naravi nikoli ni povsem geostrofski. V lokalnem kartezičnem koordinatnem sistemu njegovo zonalno komponento zapišemo kot

$$u = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

meridionalno komponento pa kot

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

V našem primeru imamo zgolj zonalno komponento vetra. Parcialni odvod diskretiziramo in zapišemo

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{f\rho} \frac{p_2 - p_1}{\Delta y} = \\ &= -\frac{1}{1 \text{ kg m}^{-3} 10^{-4} \text{ s}^{-1}} \frac{(85460 - 85600) \pm 20 \text{ Pa}}{10^5 \text{ m}} = \\ &= 14 \pm 2 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Absolutna napaka izračunanega vetra (in pri nizkih hitrostih vetra tudi relativna) je torej že pri zahtevani natančnosti merjenja pritiska precejšnja.

2.2.8 Naloga - toplotno raztezanje živosrebrnega barometra

Kolikšen je vpliv povišanja temperature za 20 K na meritev pritiska z živosrebrnim barometrom? Najprej upoštevaj, da se segreva zgolj živo srebro, koeficient volumnskega raztezka $\beta_{Hg} = 1.8 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Nato upoštevaj še, da se poleg živega srebra razteza tudi steklo. Koeficient linearnega raztezka stekla je $\alpha_g = 5.9 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Raztezek volumna V živosrebrne tekočine pri spremembi temperature dT je enak $dV = V\beta dT$. Vsa sprememba volumna se odrazi v zvišanju stolpca Hg, torej $dV = Sdh$. Sprememba višine stolpca Hg pa je s spremembo pritiska povezana kot

$$\frac{dp}{p} = \frac{dh}{h} = \beta_{Hg} dT = 0.36 \% ,$$

kar pomeni pri zunanjem pritisku 1000 hPa precejšnjo napako 3.6 hPa v izmerjenem pritisku.

Upoštevajmo sedaj, da se razteza tudi steklena posoda, v kateri se nahaja živo srebro. Ločimo dva efekta. Steklo se podaljša v navpični smeri, kar pa ni vir napake - merska skala namreč ni vtisnjena v steklo. Steklo pa se razširi tudi v horizontalni smeri, t.j. povečata se tako notranji kot zunanji obseg kapilare. Zapišemo

$$\begin{aligned} do &= o\alpha_g dT \\ 2\pi dr &= 2\pi r\alpha_g dT \\ 2\pi r dr &= 2\pi r^2\alpha_g dT \\ dS &= 2S\alpha_g dT . \end{aligned}$$

Poveča se torej notranja površina stekla, skupen volumen pa se ne spremeni. Velja torej

$$\begin{aligned} dV &= Sdh + dSh = 0 \\ \frac{dh}{h} &= -\frac{dS}{S} \end{aligned}$$

Zopet zapišemo

$$\frac{dp}{p} = \frac{dh}{h} = (\beta_{Hg} - 2\alpha_g) dT = 0.33 \% .$$

Živo srebro se torej razteza za velikostni red bolj kot steklo, zato je napaka še vedno precejšnja.

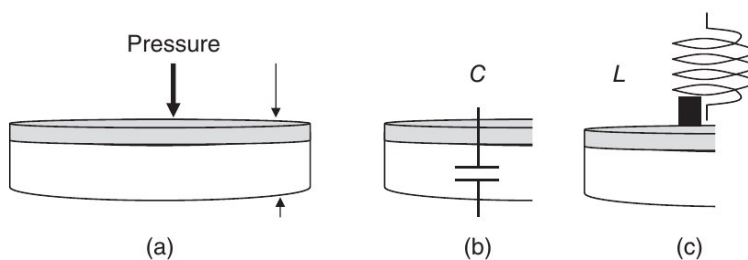
2.3 Aneroidni barometer

Aneroidni (breztekočinski) barometer (slika 2.8) meri zračni pritisk prek merjenja raztezanja in krčenja evakuirane krožne kapsule. Krožno kapsulo zgoraj in spodaj sestavljata kovinski ploščici, lahko pa je tudi pa spodaj kovinska ploščica, zgoraj pa diafragma - opna. Prost del kapsule je prek sistema vzvodov povezan s kazalcem, ki pokaže izmerjeno vrednost pritiska. V evakuirani kapsuli je (kot namiguje že ime) nizek pritisk, zaradi česar se zgornji (prosti) del kapsule ob povišanem zračnem pritisku spusti, ob znižanem pritisku pa dvigne. Te premike lahko merimo mehansko s sistemom vzvodov, kot npr. v barografu na sliki 2.8.



Slika 2.8: Aneroidni barometer v barografu (vir: *diameter.si*).

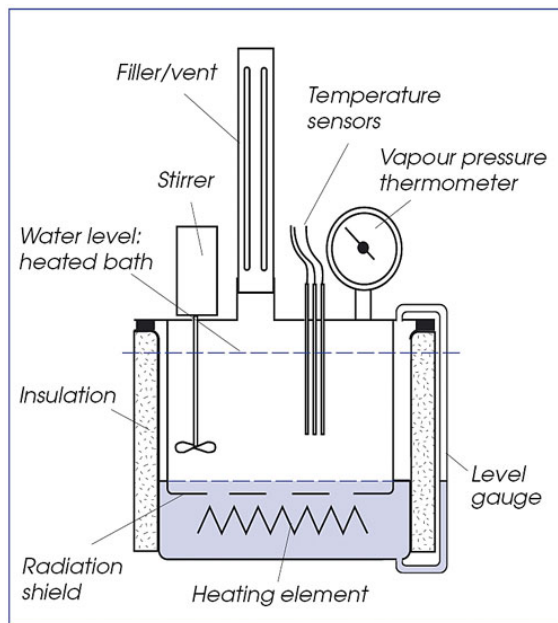
V modernih digitalnih aneroidnih barometrih se premiki merijo elektronsko prek sprememb v kapacitivnosti kondenzatorja ali induktivnosti tuljave (slika 2.9), kar omogoča zelo natančne meritve pritiska. Aneroidni barometer se zaradi priročnosti uporablja tudi za merjenja pritiska v radiosondah.



Slika 2.9: a) Vertikalna deformacija opne aneroidnega barometra zaradi spremembe pritiska. Elektronsko merjenje deformacije lahko poteka b) prek merjenja spremembe kapacitivnosti zaradi spremembe razdalje med ploščama kondenzatorja ali c) zaradi spremembe pozicije jedra, okoli katerega je navita tuljava, se spremeni njena induktivnost. Vir: [6].

2.4 Hipsometer

S hipsometrom (slika 2.10) merimo atmosferski pritisk indirektno. To pomeni, da ne merimo odziva, ki je posledica pritiska oz. sile, ki jo pritisk povzroča, temveč merimo neko drugo količino, ki je funkcija pritiska. Pri merjenju pritiska s hipsometrom izkoriščamo točko vrelišča tekočine.



TH1: Schematic diagram of hipsometer/heated water bath

Slika 2.10: Shema hipsometra (vir: discoverarmfield.com).

Hipsometer sestoji iz posode s tekočino, ki jo segrevamo, dokler ne zavre (ali pa uporabimo tako, ki vre že pri sobni temperaturi, npr. freon). S termometrom, ki se nahaja znotraj posode, izmerimo temperaturo vrelišča T_b . Temperatura vrelišča se z zniževanjem zračnega pritiska zniža. Zračni pritisk p izračunamo iz izmerjene temperature vrelišča T_b z integracijo Clausius-Clapeyronove enačbe

$$p = p_0 \exp \left[\frac{L(T_b)}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_b} \right) \right], \quad (2.4.1)$$

kjer je $T_0 = 99.97^\circ\text{C}$ vnaprej znana temperatura vrelišča pri standardnem zračnem tlaku $p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$.

Naprava je bila še posebej priljubljena med geografi v 19. stoletju, v moderni dobi pa so jo uspešno uporabili tudi v radiosondi. Meritev temperature mora biti pri tem izjemno natančna.

2.4.1 Naloga - vpliv napačno izmerjene temperature s hipsometrom na izračun pritiska.

Kolikšna je napaka z vodnim hipsometrom izmerjenega pritiska na morski gladini, če se pri meritvi temperature vrelišča tekočine zmotimo za 0.1 K ?

Diferenciramo integralno obliko Clausius-Clapeyronove enačbe (2.4.1) in dobimo

$$\frac{dp}{dT_b} = \frac{Lp_0}{RT_b^2} \exp \left[\frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_b} \right) \right]$$

Na nivoju morja velja $T_b = T_0$, zato lahko zgornjo enačbo poenostavimo v

$$dp = \frac{Lp_0}{RT^2} dT_b = 3.9 \text{ hPa} .$$

Pri izračunu smo upoštevali za vrednost latentne toplote $L = 2.5 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$ in specifično plinsko konstanto za vodno paro $R = 461.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

2.5 Dodatne naloge za vajo

2.5.1

Meteorološka postaja je na nadmorski višini 1000 m. Višina živosrebrnega stolpca v barometru je 72 cm ($\rho_{\text{Hg}} = 13.5 \text{ kg L}^{-1}$). Inštrument za merjenje temperature se je pokvaril. Na srečo imamo še psihrometer, ki nam pokaže temperaturo mokrega termometra 10°C in dodaten inštrument, prek katerega posredno izmerimo temperaturo rosišča. Ta je 5°C . Kolikšen je zračni pritisk na morskem nivoju, če privzamemo, da je atmosfera izotermna?

2.5.2

Na meteorološki postaji na višini 700 m in geografski širini 45° merimo pritisk z živosrebrnim barometrom. Potem, ko smo meritev korektno opravili, za določitev pritiska na nivoju morja upoštevamo tri popravke:

1. popravek zaradi temperaturnega raztezanja živega srebra,
2. popravek zaradi spreminjanja gravitacijskega pospeška z geografsko širino in nadmorsko višino,
3. popravek pritiska zaradi nadmorske višine postaje (izračun reduciranega pritiska).

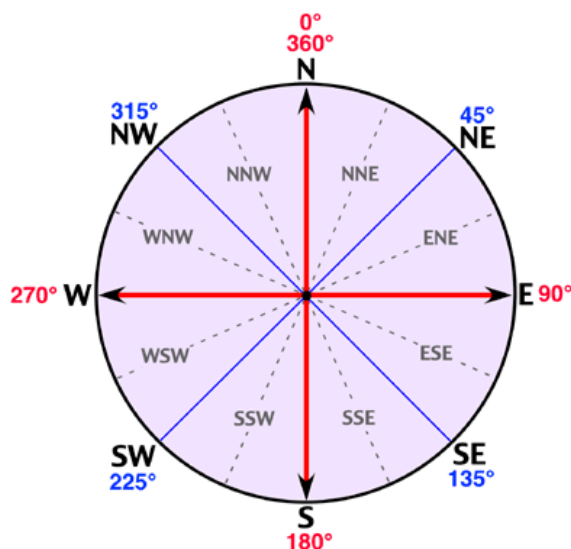
Kolikšen je na morski nivo preračun pritisk po teh popravkih, če smo odčitali 754.2 mm visok stolpec živega srebra in temperaturo 24°C . Upoštevaj sledeče vrednosti parametrov: $\rho_{\text{Hg}}(0^\circ\text{C}) = 1.3579 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $\beta_{\text{Hg}} = 1 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, težnostni pospešek na ekvatorju na nivoju morja pa $g_0 = 9.785 \text{ m s}^{-2}$.

Poglavje 3

Merjenje vetra

3.1 Uvod

Veter je 3D spremenljivka, torej $\vec{v} = (u, v, w)$. Komponente po vrsti predstavljajo zonalno, meridionalno in vertikalno hitrost. Za potrebe meteoroloških meritev običajno merimo horizontalno hitrost vetra in njegovo smer glede na smer neba. Horizontalna smer vetra θ je podana v kontrazimutnem zapisu (in ne polarnem) z izhodiščem pri geografskem severu (slika 3.1). Njena tipična hitrost v prosti atmosferi je 10 m s^{-1} , pri tleh pa $2 - 5 \text{ m s}^{-1}$. Vertikalna hitrost vetra je v atmosferi običajno reda velikosti nekaj cm s^{-1} , pri konvektivnih dviganjih in pri dvigu zraka ob razsežnih orografskih ovirah pa lahko doseže nekaj m s^{-1} .



Slika 3.1: Vetrovna roža.

Za potrebe operativnih numeričnih modelov za napovedovanje vremena so vzeta 5-minutna povprečja vetra, za potrebe klimatologije 60-minutna. Zahtevana natančnost meritev vetra je 0.5 m s^{-1} pri hitrosti vetra pod 5 m s^{-1} in 10 % pri hitrosti vetra nad to mejo. Smer naj bo na 5° natančno izmerjena.

Javnosti so meritve vetra najpogosteje sporočene v km h^{-1} , v anglosaških deželah pa v $\text{kn} = 1.852 \text{ km h}^{-1}$, v numeričnih modelih pa se uporabljajo izključno m s^{-1} .

Načinov merjenja vetra je mnogo. Najprej jih bomo zgolj našteali, v nadaljevanju pa pojasnili, v katerih okoliščinah so nekateri primernejši kot drugi. Načini merjenje hitrosti vetra so:

- Robinzonov križ (Robinzonmeter, tudi šalčni anemometer, ang. cup anemometer),

- anemometer s propelerjem,
- Bernoullijeva oz. Prandtlova cev,
- Pitotova cev (tudi za mehansko merjenje hitrosti letal),
- inštrument na zračni upor,
- sonični anemometer,
- anemometer na vročo žico.

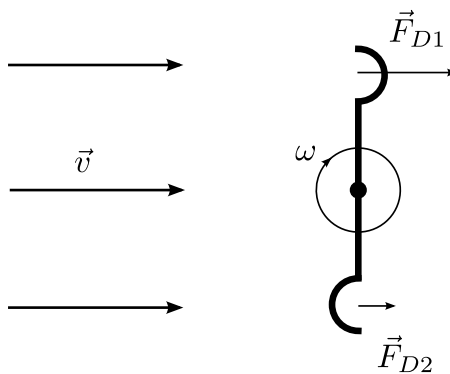
Instrumenta, ki merita tako hitrost kot smer vetra, sta npr. Wildow vetrokaz in vetrovna vreča. Smer vetra pa izmerimo z vetrokazom.

3.2 Robinzonov križ (šalčni anemometer)

Danes se za merjenje vetra najpogosteje uporablja anemometer s tremi šalčkami (slika 3.2 levo), v preteklosti pa so se pojavljale tudi izvedbe s štirimi šalčkami (slika 3.2 desno). Najpogostejša vira napake takih anemometrov sta sneg in zaledenitev. Ta dva spremenita aerodinamične lastnosti šalčk, v izjemnih pogojih pa povsem onemogočita vrtenje šalčk.



Slika 3.2: Levo: 3-šalčni anemometer (vir: www.directindustry.com), desno: 4-šalčni anemometer, tudi Robinzonmeter, kot ga je leta 1846 skonstruiral irski fizik Thomas Romney Robinson (vir: www.wikipedia.org).



Slika 3.3: Dvošalčni model anemometra.

Opišimo delovanje takega anemometra s preprostim teoretičnim modelom dvošalčnega anemometra (slika 3.3). Izkaže se namreč, da z dvošalčnim modelom anemometra lahko analitično izpeljemo enake dinamične lastnosti kot numerično s trošalčnim [9]. Prav tako je dovolj, da obravnavamo sili upora na šalčki anemometra kot časovno neodvisni, pa čeprav se sili z vrtenjem šalčk spreminjata - spreminjata se namreč tako efektivna površina šalčke (projekcija šalčke na horizontalno ravnino, katere normala je vektor hitrosti) kot koeficient upora, ki je funkcija efektivne oblike (oblike glede na smer vetra) ter v majhni meri tudi funkcija hitrosti. Kljub tem privzetkom lahko izpeljemo podobne dinamične

lastnosti kot bi jih z bolj kompliciranimi analitičnimi ali numeričnimi modeli.

Na šalčki anemometra delujeta sili upora, ki imata enako smer, a različno velikost. Slednje je posledica različnega upora - šalčka, ki čuti upor vetra na odprti strani, ima jasno večji dinamični upor ($\vec{F}_{D1}$) kot šalčka, ki čuti upor vetra na zaprti strani ($\vec{F}_{D2}$). Enačbo dinamičnega upora zapišemo kot

$$F_D = \frac{1}{2} c_D \rho S v_r^2 ,$$

kjer je c_D koeficient upora, ρ gostota zraka, S projekcija površine šalčke na ravnino, ki je pravokotna na smer vetra in v_r relativna hitrost vetra glede na hitrost vrtenja šalčke. Anemometer se torej vrti, ker sta sili, ki delujeta na šalčki, različni.

Najprej obravnavajmo primer, ko je obodna hitrost šalčk $v_c = \omega R$ manjša od hitrosti vetra v , torej $v_c < v$, pri tem je R razdalja palčk od vpetja. Obodna hitrost šalčk je skoraj vedno manjša od hitrosti vetra, razen v izjemnih primerih, ko sunek vetra hitro pojame, šalčke pa se zaradi vztrajnosti vrtijo naprej hitreje od vetra. Sili upora na obe šalčki zapišemo takole

$$\begin{aligned} F_{D1} &= \frac{1}{2} c_{D1} \rho S (v - v_c)^2 \\ F_{D2} &= \frac{1}{2} c_{D2} \rho S (v + v_c)^2 . \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Zakon o ohranitvi vrtilne količine pravi, da telo kroži enakomerno, če je vsota vseh navorov, ki delujejo na telo, enaka 0. V kolikor temu ni zadoščeno, telo kroži pospešeno, vrtilna količina pa se spreminja skladno z

$$\frac{d\Gamma}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = \sum_i M_i . \quad (3.2.2)$$

Kateri navori pa delujejo na naš sistem? Poleg aerodinamskega navora M_A , ki je posledica sile aerodinamskega upora, deluje v ležaju še navor zaradi trenja M_F , ki upočasnjuje vrtenje. Ta navor v naših nadaljnjih izračunih zanemarimo, saj velja $M_F \ll M_A$. Ni pa odveč omeniti, da je navor zaradi trenja odvisen od temperature in kotne hitrosti vrtenja anemometra. Zapišemo lahko

$$M_F(T, \omega) = B_0(T) + B_1(T)\omega + B_2(T)\omega^2 ,$$

pri čemer velja $B_0, B_1, B_2 < 0$.

Razpišimo sedaj nadalje enačbo za spreminjanje vrtilne količine (3.2.2).

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= M_A \\ 2m_c R^2 \frac{1}{R} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{2} \rho S R \left(c_{D1} (v - v_c)^2 - c_{D2} (v + v_c)^2 \right) \\ \frac{dv_c}{dt} &= \underbrace{\frac{1}{4} \frac{\rho S}{m_c}}_K \left(\underbrace{v^2 (c_{D1} - c_{D2})}_{\tilde{C}} - v_c \underbrace{(2vc_{D1} + 2vc_{D2})}_{\tilde{B}} + v_c^2 \underbrace{(c_{D1} - c_{D2})}_{\tilde{A}} \right) . \end{aligned}$$

V izračunu smo upoštevali, da je vztrajnostni moment šalčk enak vztrajnostnemu momentu dveh točkastih mas na razdalji R od vpetja, torej $J = 2m_c R^2$. Prav tako upoštevamo, da je masa prečke, ki nosi šalčke, zanemarljiva napram masi šalčk. Zgornjo enačbo še nadalje poenostavimo, če zapišemo $C = K\tilde{C}$, $B = K\tilde{B}$, $A = K\tilde{A}$ in končna diferencialna enačba za spreminjanje obodne hitrosti šalčnega anemometra je

$$\frac{dv_c}{dt} = C - v_c B + v_c^2 A . \quad (3.2.3)$$

Najprej izračunajmo hitrost šalčk v stacionarnem stanju $dv_c/dt = 0$. Uporabimo sledeče podatke. Hitrost vetra naj bo 10 m s^{-1} , gostota zraka $\rho = 1.22 \text{ kg m}^{-3}$, radij šalčke $r = 2 \text{ cm}$, površina šalčke $S = \pi r^2 = 0.00126 \text{ m}^2$. Hitrost šalčk v stacionarnem stanju izračunamo tako, da poiščemo ničle kvadratne enačbe $C - v_c B + v_c^2 A = 0$:

$$(v_c^S)_{1,2} = \frac{+B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Rešitvi sta $(v_c^S)_1 = 3.2 \text{ m s}^{-1}$ in $(v_c^S)_2 = 31.4 \text{ m s}^{-1}$. Fizikalna rešitev je zgolj prva, saj obodna hitrost šalčk pri konstantnem vetru ne more biti večja od hitrosti vetra, hkrati pa predstavlja nižje energijsko stanje.

Nadalje se lotimo reševanja diferencialne enačbo (3.2.3). Zanima nas, kako pospeši anemometer, če je njegova hitrost na začetku enaka 0, torej $v_c(0) = 0$, hitrost vetra v pa hipoma naraste in je nato konstantna. V DE ločimo spremenljivke in rešujemo določeni integral

$$\int_0^{v_c(t)} \frac{dv_c}{C - v_c B + v_c^2 A} = \int_0^t dt.$$

Integral na levi strani enačaja lahko rešimo z razcepom na parcialne ulomke

$$\frac{1}{C - v_c B + v_c^2 A} = \frac{1}{(v_c - F)(v_c - G)A} = \frac{1}{A} \left(\frac{P}{v_c - F} + \frac{Q}{v_c - G} \right),$$

pri čemer velja $B = A(F + G)$ in $C = AFG$. Nato poiščemo P ter Q in dobimo

$$\begin{aligned} \int \frac{dv_c}{(v_c - F)(v_c - G)A} &= \frac{1}{A(F - G)} \left(\int \frac{dv_c}{v_c - F} - \int \frac{dv_c}{v_c - G} \right) \\ &= \frac{1}{A(F - G)} (\log |v_c - F| - \log |v_c - G|). \end{aligned}$$

Upoštevamo še meje, v katerih integriramo, in dobimo

$$\frac{1}{A(F - G)} \left(\log \frac{v_c - F}{v_c - G} + \log \frac{G}{F} \right) = t,$$

od tod pa po krajšem izračunu še končen izraz za naraščanje obodne hitrosti šalčk

$$v_c(t) = \frac{F [1 - \exp(tA(F - G))]}{1 - \frac{F}{G} \exp(tA(F - G))}.$$

Tu je

$$\begin{aligned} F &= v \frac{c_{D1} + c_{D2} - 2\sqrt{c_{D1}c_{D2}}}{c_{D1} - c_{D2}} \\ G &= v \frac{c_{D1} + c_{D2} + 2\sqrt{c_{D1}c_{D2}}}{c_{D1} - c_{D2}} \\ A &= K(c_{D1} - c_{D2}). \end{aligned}$$

Obodna hitrost šalčk po dolgem času ($t \rightarrow \infty$), torej v stacionarnem stanju, je premo sorazmerna s hitrostjo vetra v . Velja torej, da je F prva ničla kvadratne enačbe oz. stacionarna hitrost $(v_c^S)_1$. Kakšna pa je časovna konstanta? Ta je enaka

$$\tau = \frac{1}{A(F - G)} = \frac{m_c}{\rho S v \sqrt{c_{D1}c_{D2}}},$$

torej obratno sorazmerna s hitrostjo vetra v , kar pomeni, da je pri višji hitrosti vetra časovna konstanta krajša, pri nižji hitrosti pa daljša. Anemometer je torej bolj odziven pri višji hitrosti vetra.

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je obodna hitrost šalčk večja od hitrosti vetra, torej $v_c > v$. To se zgodi, ko sunek vetra zelo hitro pojame. Obe šalčki čutita upor vetra na izbočeni strani. Sili upora na posamezno šalčko zapišemo zato takole

$$F_{D1} = \frac{1}{2} c_{D2} \rho S (v_c - v)^2$$

$$F_{D2} = \frac{1}{2} c_{D2} \rho S (v + v_c)^2 .$$

V primerjavi z enačbo (3.2.1) je razlika v tem, da smo obakrat uporabili koeficient upora zaprte šalčke c_{D2} . Prav tako obe sili povzročata negativen navor, torej zavirata vrtenje. Končna diferencialna enačba je tako

$$\frac{dv_c}{dt} = \underbrace{\frac{1}{4} \frac{\rho S}{m_c}}_K (-2c_{D2}(v^2 + v_c^2)) .$$

Zanima nas primer, ko je začetna hitrost šalčke $v_c(0) = v_0$, veter pa se nenadoma popolnoma umiri ($v = 0$). Potem velja sledeča diferencialna enačba

$$\frac{dv_c}{dt} = -2Kc_{D2}v_c^2 .$$

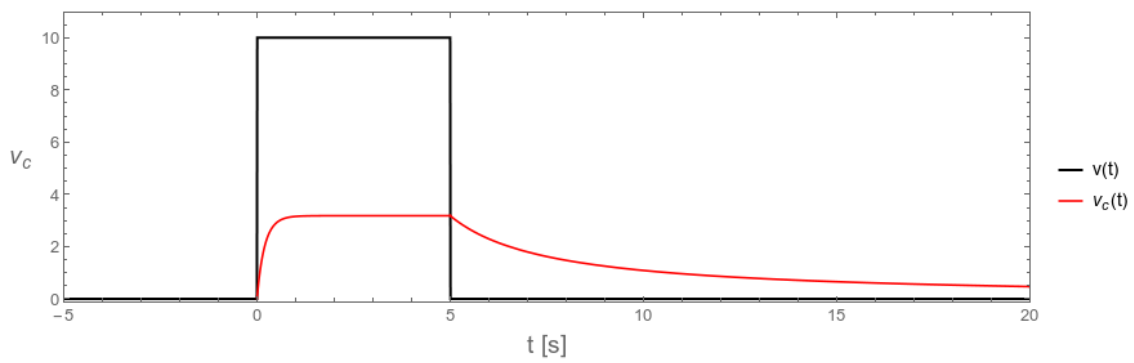
Ločimo spremenljivke in zapišemo določeni integral

$$\int_{v_0}^{v_c(t)} \frac{dv_c}{v_c^2} = -2Kc_{D2} \int_0^t dt ,$$

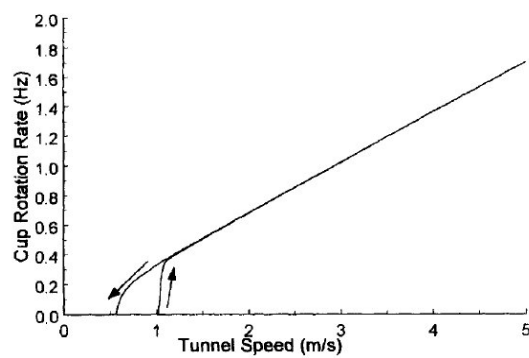
katerega rešitev je pojevanje obodne hitrosti šalčk s časom kot

$$v_c(t) = \frac{v_0}{1 + 2Kc_{D2}v_0t} .$$

Rešitvi za naraščanje in pojevanje obodne hitrosti narišemo (slika 3.4). Opazimo, da hitrost šalčk hitro naraste in doseže stacionarno hitrost v_c^S (ki dinamično ustreza hitrosti vetra v), ko pa veter pojenja, hitrost šalčk zaradi vztrajnosti le počasi pade proti 0. Zaradi tega je povprečna izmerjena hitrost vetra s šalčnim anemometrom nekoliko višja, kot je dejanska povprečna hitrost vetra. Obodna hitrost šalčk sicer v realnosti pade nekoliko hitreje kot namiguje graf. Vrtenje šalčk namreč zavira tudi navor zaradi trenja v ležajih, ki pa ga v izračunu nismo upoštevali, pomemben pa je izključno, ko je aerodinamski navor nizek. Na sliki 3.5 je prikazano še, kako se frekvenca vrtenja šalčk spreminja s hitrostjo vetra. Pri nizkih hitrostih vetra opazimo histerezo. Ko veter začne pihati, je navor zaradi lepenja v ležaju močnejši od navora zaradi vetra in šalčke do neke mejne hitrosti vetra (recimo ji mejna pospeševalna hitrost v_p) mirujejo. Ko pa veter pojema proti hitrosti 0, se šalčke že vrtijo in se zaradi vztrajnosti vrtijo še naprej, dokler se pri neki manjši mejni hitrosti vetra (recimo ji mejna zaviralna hitrost v_z , $v_z < v_p$) ne začnejo pospešeno ustavljati ($M_F > M_A$).



Slika 3.4: Spreminjanje obodne hitrosti šalčk $v_c(t)$ s spreminjanjem obodne hitrosti vetra $v(t)$ v času.



Slika 3.5: Eksperimentalno izmerjeno spreminjanje frekvence vrtenja šalčk ω s spreminjanjem hitrosti vetra v vetrovniku. Povzeto po [2].

3.3 Pitotova cev

Pitotova cev se najpogosteje uporablja za merjenje hitrosti letal. Za potrebe meritev ozračja je Pitotova cev pritrjena na vetrokaz (slika 3.6), ki cev obrača v smer, iz katere piha veter. Zanima nas, kolikšna je hitrost vetra, če smo izmerili statični pritisk p_s , skupni pritisk p_t , zunanji termometer pa je izmeril temperaturo zraka T ?



Slika 3.6: Pitotova cev z vetrokazom (vir: www.accuweather.com).

Pitotova cev meri posebej statični pritisk in skupni pritisk zraka. Na sredini med pritiskovima komorama je lahko občutljiva opna (slika 3.7), ki meri pritisk na podlagi upogiba. Skupni pritisk p_t je večji od statičnega pritiska p_s za velikost dinamičnega pritiska $\frac{1}{2}\rho v^2$. Od tod izračunamo hitrost vetra kot

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p_s)} = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)RT}{p_s}}.$$

Pri hitrostih vetra $v > 100 \text{ m s}^{-1}$ je nujno treba upoštevati še stisljivost zraka.

Variacija Pitotove cevi je Bernoullijeva (Prandtlova) cev, kjer se razlika med statičnim in skupnim pritiskom izraža v različni višini Δh stolpca tekočine (npr. živosrebrne) na obeh odprtih delih manometra. V tem primeru velja

$$p_t = p_s + \frac{1}{2}\rho v^2$$

in

$$p_t = p_s + \rho_{Hg}g\Delta h.$$

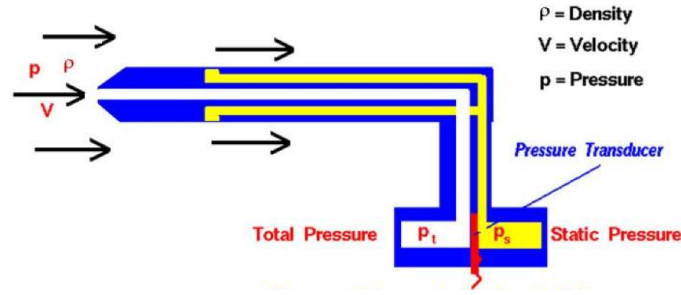
Odtod izračunamo, kako je hitrost vetra povezana z razliko v višini stolpca tekočine

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_{Hg}g\Delta h}{\rho_{zrak}}} = \sqrt{\frac{2\rho_{Hg}g\Delta hRT}{p_s}},$$

kjer je p_s na meteorološki postaji izmerjen statični pritisk, T pa temperatura zraka.

3.3.1 Naloga - napaka izmerjene hitrosti vetra

Kolikšni sta izmerjena hitrost in napaka hitrosti letala, ki za merjenje hitrosti v zraku uporablja pitotovo cev? Tlak na začetku pitotove cevi je 578 hPa, na zastojnem koncu cevi pa 623 hPa. Temperatura okoliškega zraka je -25°C . Natančnost merjenja zračnega tlaka je 2 hPa, temperature pa 1 K. Statični pritisk p v atmosferi (torej dejanski tlak) je



Slika 3.7: Shematski prikaz delovanja Pitotove cevi (vir: www.grc.nasa.gov).

povečan za zastojni tlak. Hitrost letala je tako

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_t - p)} = \sqrt{2RT \left(\frac{p_t}{p} - 1 \right)} = 105 \text{ m s}^{-1}.$$

Napako letala izračunamo z diferenciranjem zgornje enačbe. Splošno velja za napake spremenljivke y , ki je funkcija spremenljivk x_i , torej $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pravilo

$$dy = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| dx_i. \quad (3.3.1)$$

Bolj znan podpravilo tega je, da se pri množenju in deljenju (torej če je $y = \prod_{i=1}^n x_i$) seštevajo relativne napake, torej

$$\frac{dy}{y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{dx_i}{x_i} \right|.$$

Pri seštevanju/odštevanju (če je $y = \sum_{i=1}^n x_i$) pa se seštevajo absolutne napake

$$dy = \sum_{i=1}^n dx_i.$$

V našem primeru pa pravilo (3.3.1) pomeni

$$dv = \left| \frac{\partial v}{\partial T} \right| dT + \left| \frac{\partial v}{\partial p_t} \right| dp_t + \left| \frac{\partial v}{\partial p_s} \right| dp_s.$$

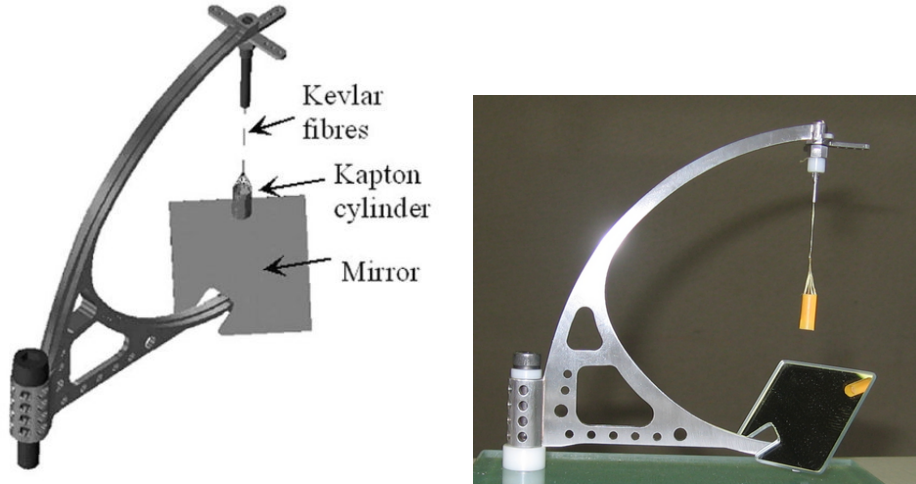
Pri tem so posamezni prispevki enaki

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial T} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2RT \left(\frac{p_t}{p} - 1 \right)}} 2R \left(\frac{p_t}{p} - 1 \right), \\ \frac{\partial v}{\partial p_t} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2RT \left(\frac{p_t}{p} - 1 \right)}} \frac{2RT}{p}, \\ \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2RT \left(\frac{p_t}{p} - 1 \right)}} \frac{-2RT p_t}{p^2}. \end{aligned}$$

Napaka meritve je torej enaka 5 m s^{-1} .

3.4 Inštrument na zračni upor

Inštrumentu na zračni upor pravimo tudi ping-pong anemometer. Ta meri hitrost vetra prek merjenja kota odklona tanke vrvi (ročke), na koncu katere je pritrjena lahka kroglica (ali valj), ki se zaradi upora v toku zraka odkloni od ravnovesne lege. Včasih s kamero pomerimo tudi odmik kroglice od njene ravnovesne lege (slika 3.8 desno). Najbolj praktično je, da je telo sferične (ali cilindrične) oblike. Le tako je upor telesa enak (oz. približno enak) ne glede na smer vetra. Kljub temu, da se takšen inštrument za resne meteorološke meritve ne uporablja, pa so ga v podobni izvedbi vseeno uporabili pri merjenju vetra na Marsu na modulu Phoenix Mars Lander (slika 3.8 levo).



Slika 3.8: Levo: skica inštrumenta na zračni upor, kakršnega so uporabili na robotu Phoenix Mars Lander (vir: [11]), desno: realna izvedba inštrumenta. Odmike uteži iz ravnovesne lege spremljamo s pomočjo zrcala in kamere (ir: www.publiclab.org).

Kroglica obstane v legi, v kateri je vsota vseh navorov enaka 0. Sili, ki povzročata navor, delujeta v središču kroglice. Prva je sila teže $F_g = mg$, ki povzroča navor

$$M_g = F_g \sin \varphi R = mgR \sin \varphi ,$$

kjer je φ kot med navpičnico (ravnovesno lego kroglice v brezvetrju) in vrvico (ročko). Druga pa je sila aerodinamskega upora (upoštevamo kvadratni zakon upora), ki povzroča navor

$$M_D = F_D \cos \varphi R = \frac{1}{2} \rho_{zrak} S C_D v^2 \cos \varphi R ,$$

kjer je $S = \pi r^2$ projekcija površina kroglice na ravnino, ki jo pravokotno prebada vektor vetra $\vec{v}$. Kot φ potem izračunamo takole

$$\tan \varphi = \frac{\rho_{zrak} S C_D v^2}{2mg} ,$$

odmik x od ravnovesne lege pa

$$x = R \sin \varphi .$$

3.4.1 Naloga - različica inštrumenta na zračni upor

Kroglica z maso m in radijem r je pritrjena na ročko dolžine R , ki je krožno vpeta v tla. Kroglico z ročko je v navpični legi (ravnovesju) ob brezvetrju. V tej legi jo drži vzmet

s koeficientom k , ki prijemlje na polovici dolžine ročke. Kolikšna je hitrost vetra, če je izmerjen kot med ročko in navpičnico enak φ ?

Kroglica z ročko obstane v legi, kjer je vsota vseh navorov enaka 0.

$$M_D + M_g - M_v = 0 .$$

Nadalje razpišemo

$$\begin{aligned} RF_D \cos \varphi + RF_g \sin \varphi - \frac{R}{2} F_v \cos \varphi &= 0 \\ R \frac{1}{2} \rho_{zrak} S c_D v^2 + R m g \sin \varphi - \frac{R}{2} k \frac{R}{2} \sin \varphi \cos \varphi &= 0 , \end{aligned}$$

od koder izračunamo hitrost vetra

$$v = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} k R \sin \varphi - m g \tan \varphi}{\frac{1}{2} \rho_{zrak} S c_D}} .$$

3.4.2 Naloga - občutljivost inštrumenta na zračni upor

Robot raziskuje Marsovo površje in atmosfero. Poleg ostalih količin bo meril tudi hitrost vetra. Pripravo za merjenje hitrosti vetra predstavlja gladka kroglica premera 4 cm in mase 0.5 g, ki je obešena na 16 cm dolgi vrvici. Gostota Marsove atmosfere pri površju je 0.015 kg m^{-3} , gravitacijski pospešek pa 3.71 m s^{-2} , koeficient upora krogelnega telesa pa je $c_D = 0.5$.

Kolikšen je odmik φ od ravnovesne lege pri hitrosti vetra 10 m s^{-1} ? Kolikšna pa je občutljivost $\frac{d\varphi}{dv}$ tega anemometra pri hitrosti vetra $v_0 = 30 \text{ m s}^{-1}$? Pri kateri hitrosti vetra bo napaka merilnika enaka 10 % hitrosti vetra, če je napaka pri odčitavanju najmanj 0.1° ?

3.5 Anemometer na vročo žico

Anemometer na vročo žico je v osnovi uporovni termometer, s katerim prek merjenja hitrosti (prisilnega) konvekcijskega odtekanja toplote iz žičke izračunamo hitrost vetra. Žička je običajno platinasta ali wolframova in debela nekaj μm (slika 3.9). Hlajenje žičke je večje ob večji hitrosti vetra, zato njena temperatura pade oziroma jo moramo bolj ogrevati (skozi njo spustiti večji električni tok), če želimo, da ohrani prvotno temperaturo.



Slika 3.9: Anemometer na vročo žico (ang. hot wire anemometer).

Ohlajanje žičke je torej posledica prisilne konvekcije. Zapišemo lahko, da je trošenje moči P na dolžinsko enoto l žičke enako

$$\frac{P}{l} = \Omega d \Delta T ,$$

kjer Ω konvekcijski koeficient (v enotah $\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$), d premer žičke (debelina površinskega preseka žičke) ter ΔT razlika med temperaturo žičke in temperaturo zraka, torej $\Delta T = T_z - T_{\text{zrak}}$. Na tem mestu uvedemo še Nusseltovo število, ki podaja razmerje med toplotnim tokom prisilne konvekcije in toplotnim tokom skozi ustrezno plast mirujoče tekočine, torej

$$Nu = \frac{\Omega d}{\lambda} = a + b\sqrt{v} ,$$

kjer je odvisnost od hitrosti vetra korenska. Moč, ki se troši na žički zaradi odtekanja toplote s prisilno konvekcijo, je enaka moči, ki jo potrebujemo za gretje žičke. Velja torej

$$P = \lambda l (a + b\sqrt{v}) (T_z - T_{\text{zrak}}) = I^2 R(T_z) .$$

Tok skozi žičko torej reguliramo tako, da ga uravnamo in dosežemo prvotno temperaturo žičke.

3.6 Sonični anemometer

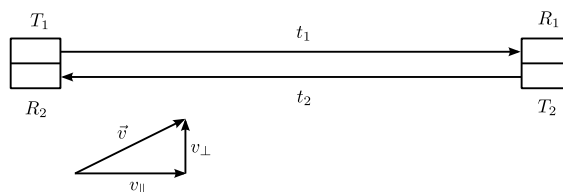
Sonični anemometer meri čas potovanja zvoka od oddajnika do sprejemnika, katerih medsebojna oddaljenost je vnaprej znana. Čas potovanja zvoka na tej poti je odvisen od vetra, torej od gibanja medija (zraka), po katerem se prenašajo longitudinalni valovi, t.j. zgoščine in razredčine zraka oz. območja povišanega in območja znižanega pritiska.

Za merjenje horizontalnega (dvorazsežnega) vetra se uporablja anemometer z dvojno osjo, za merjenje trirazsežnega vetra pa s trojno osjo (slika 3.10).



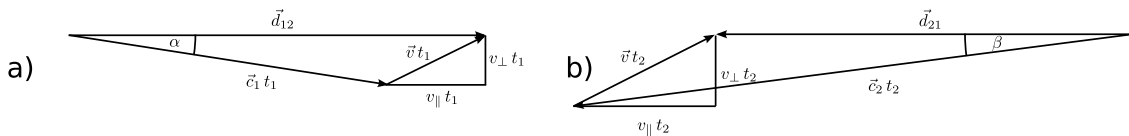
Slika 3.10: Levo: 2D sonični anemometer, desno: 3D sonični anemometer (vir: www.biral.com).

Princip delovanja soničnega anemometra ponazorimo s primerom enoosnega soničnega anemometra [10]. Osnovni del senzorja predstavljata paroma nasproti si ležeča oddajnika (ang. transmitter, T) in sprejemnika (ang. receiver, R) zvočnega valovanja (slika 3.11). Oddajnik in nasprotni sprejemnik sta sinhronizirana, zato čas potovanja zvoka med njima preprosto pomerimo. Prvi signal bo pot dolžine d od oddajnika do sprejemnika opravil hitreje, saj se poleg zvočnih valov v isti smeri premika tudi medij (s hitrostjo $\vec{v}$), po katerem se zvočni valovi razširjajo. Analogno bo drugi signal za isto dolgo pot potreboval nekoliko dlje časa. Višja hitrost vetra pomeni tudi večjo razliko med časoma potovanja signalov t_1 in t_2 .



Slika 3.11: Shema soničnega anemometra.

Poglejmo, kako se v gibajočem zraku razširjata oba signala (slika 3.12). Upoštevati je potrebno, da se hitrost zvoka poveča (zmanjša) za hitrost vetra. Njuna vektorska vsota pomnožena s časom potovanja mora torej ustrezati vektorju razdalje med oddajnikom in nasprotnim sprejemnikom. Za prvi signal velja torej



Slika 3.12: Pot zvočnih signalov v gibajočem mediju: a) pot od oddajnika T_1 do sprejemnika R_1 in b) pot od oddajnika T_2 do sprejemnika R_2 .

$$\vec{d}_{12} = (\vec{c}_1 + \vec{v}) t_1, \quad (3.6.1)$$

za drugega pa

$$\vec{d}_{21} = (\vec{c}_2 + \vec{v}) t_2. \quad (3.6.2)$$

Velja še $|\vec{d}_{12}| = |\vec{d}_{21}| = d$ ter $|\vec{c}_1| = |\vec{c}_2| = c$. Hitrost zvoka je seveda enaka pri obeh signalih. Odvisna je zgolj od fizikalnih lastnosti sredstva, po katerem se zvočno valovanje razširja. Hitrost zvoka je v mirujočem in suhem zraku enaka

$$c_s = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} RT}. \quad (3.6.3)$$

Za prvi signal razpišemo vektorsko vsoto (3.6.1) po komponentah in dobimo

$$d = c \cos \alpha t_1 + v_{\parallel} t_1, \quad (3.6.4)$$

za drugega pa razpišemo (3.6.2) in dobimo

$$d = c \cos \beta t_2 + v_{\parallel} t_2. \quad (3.6.5)$$

Opazimo še, da velja

$$\sin \alpha = \frac{v_{\parallel} t_1}{c t_1} = \frac{v_{\parallel} t_2}{c t_2} = \sin \beta$$

$$\alpha = \beta$$

Sedaj lahko neznanko $c \cos \alpha$ iz enačb (3.6.4) in (3.6.5) izločimo in izračunamo komponento vetra, ki je vzporedna osi anemometra

$$v_{\parallel} = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right).$$

Analogno iz senzorjev na ostalih oseh izračunamo še druge komponente vetra.

3.6.1 Sonični anemometer kot termometer

Sonični anemometer lahko ob določenih pogojih služi tudi kot termometer. Če poznamo hitrost zvoka, lahko namreč izračunamo tudi temperaturo zraka. Iz enačb (3.6.4) in (3.6.5) lahko izločimo tudi osi vzporedno hitrost vetra $v_{\parallel}$ ter izrazimo hitrost zvoka:

$$c \cos \alpha = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right).$$

Nekaj težav nam povzroča še faktor $\cos \alpha$. Z upoštevanjem, da je hitrost zvoka $c_s \approx 340 \text{ m s}^{-1}$ in da so pri tleh hitrosti vetra običajno nizke, lahko privzamemo

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\perp}}{c} \right)^2} \\ &\approx 1. \end{aligned}$$

Pri hitrosti komponente vetra $v_{\perp} = 20 \text{ m s}^{-1}$ smo hitrost zvoka tako ocenili na 0.2 % natančno. Razen v ekstremnem vetru velja torej

$$c = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) .$$

Iz hitrosti zvoka potem izračunamo temperaturo zraka. Pri tem moramo v enačbi za hitrost zvoka 3.6.3 upoštevati še popravek zaradi vlažnosti zraka. Velja

$$c_s = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_H T_{sv}} ,$$

kjer je R_H specifična plinska konstanta vlažnega zraka, T_{sv} pa sonična virtualna temperatura

$$T_{sv} = T \left[1 + \left(\frac{\gamma_v}{\gamma_d} - \frac{M_v}{M_d} \right) \cdot \frac{e}{p - \left(1 - \frac{M_v}{M_d} \right) e} \right] .$$

3.6.2 Naloga - sonični termometer

V popolnoma suhem ozračju je hitrost zvoka enaka $c_s = \sqrt{c_p c_v} R_d T$. Teoretično nam lahko torej sonični anemometer služi kot termometer. Enoosni sonični termometer postavimo taok, da je njega os pravokotna na slemenitev razsežne orografije. Z njim spremljamo pulzacije temperature, ki so posledica gravitacijskih valov, katerih smer razširjanja je enaka smeri osi anemometra. Komponenta vetra, pravokotna na os soničnega anemometra, je torej zanemarljiva. Čas potovanja signala v eno smer je $560 \mu\text{s}$, v drugo smer pa $590 \mu\text{s}$. Dolžina osi je 20 cm. Kolikšna je temperatura.

Najprej izračunamo hitrost zvoka

$$c = \frac{d}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) = 348 \text{ m s}^{-1}$$

in od tod temperaturo $T = 301 \text{ K}$.

3.7 Vetrokaz

Vetrokaz (ang. wind vane, slika 3.13) je inštrument, s katerim merimo horizontalno smer vetra. Smer vetra poročamo glede na smer neba ali v kotnih stopinjah (glej sliko 3.1). Shema (tloris) vetrokaza je prikazana na sliki 3.14.



Slika 3.13: Vetrokaz (vir: www.smewind.com).

Zapisali in rešili bomo dinamično enačbo vetrokaza [7]. Tako bomo boljše razumeli, zakaj so v časovni vrsti smeri vetra značilne oscilacije, ki niso posledica visokofrekvenčnega spreminjanja smeri vetra, temveč so zgolj oscilacije vetrokaza pri prilagajanju na spremenjeno smer vetra.

Kadar smer vetra in vetrokaz nista poravnavana (vzporedna), temveč kažeta vsaksebi za nek majhen kot β , povzroča veter na vetrokaz upor in posledično navor. Zapišemo 2. Newtonov zakon za navor

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= \sum M \\ J\ddot{\beta} &= -F_u R \sin \beta' , \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

kjer je J vztrajnostni moment vetrokaza, $F_u = \frac{1}{2}\rho S C_u v^2$ sila upora, ki jo povzroča veter, S projekcija uporne površine na normalno ploskev vektorja vetra, R oddaljenost prijemališča sile od vpetja in β' efektivni kot. Uvedemo ga, saj se prijemališče sile giblje s kotno hitrostjo $\dot{\beta} = \omega$ oz. obodno hitrostjo $v_{ob} = R\dot{\beta}$. Za efektivni kot β' velja (glej sliko 3.14)

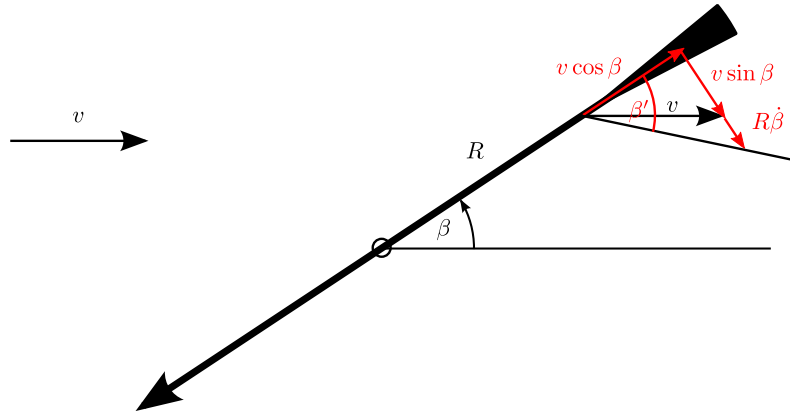
$$\begin{aligned} \tan \beta' &= \frac{v \sin \beta + R\dot{\beta}}{v \cos \beta} \\ \beta' &= \arctan \frac{v \sin \beta + R\dot{\beta}}{v \cos \beta} \\ \beta' &\approx \beta + \frac{R\dot{\beta}}{v} \end{aligned}$$

Dinamično enačbo (3.7.1) lahko tako prepišemo v

$$J\ddot{\beta} = -F_u R \left(\beta + \frac{R\dot{\beta}}{v} \right) .$$

To je DE 2. reda z dušenjem. Prepišemo jo v standardno obliko

$$\ddot{\beta} + \underbrace{\frac{F_u R^2}{Jv}}_{2\omega_0\zeta} \dot{\beta} + \underbrace{\frac{F_u R}{J}}_{\omega_0^2} \beta = 0 ,$$



Slika 3.14: Shema vetrokaza.

katere splošno rešitev poiščemo z nastavkom $\beta(t) = Ce^{rt}$. Rešitvi dobljene kvadratne algebrajske enačbe sta sledeči:

$$r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Parameter ζ opisuje, kako močno je dušenje. Glede na to ločimo tri primere (slika 3.15):

1. Močno dušeno nihanje ($\zeta > 1$). Koordinata β monotono pada proti 0. Rešitev za kot β je enaka:

$$\beta(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[A \exp\left(\omega_0 t \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + B \exp\left(-\omega_0 t \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \right].$$

2. Kritično dušenje ($\zeta = 1$). Ni periodičnega gibanja. Rešitev je v obliki

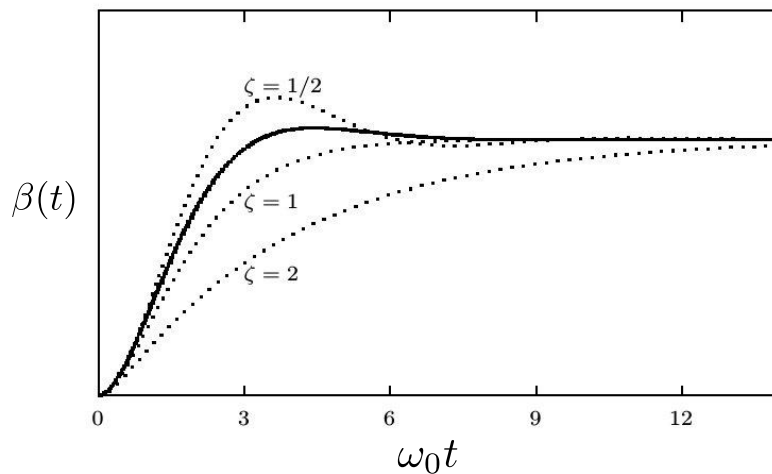
$$\beta(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$$

3. Poddušeno nihanje ($0 < \zeta < 1$). Šibko dušenje, periodično nihanje, ki se mu manjša amplituda.

$$\beta(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[A \exp\left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \zeta^2}\right) + B \exp\left(-i\omega_0 t \sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right].$$

3.7.1 Vetrna vreča

Vetrna vreča (slika 3.16) je tanka tkanina v obliki odprtega tulca z rdečimi in belimi progami. Vsaka proga pomeni eno stopnjo po Beaufortovi vetrni lestvici. Lestvica temelji na kvalitativnih opazovanjih vpliva vetra na vegetacijo na kopnem in na stanje morske gladine na obali.



Slika 3.15: Odziv vetrokaza na nenadno spremembo smeri vetra glede na različne vrednosti parametra dušenja ζ . Za vrednosti $0 < \zeta < 1$ vetrokaz pri hipni spremembi smeri vetra zaniha.



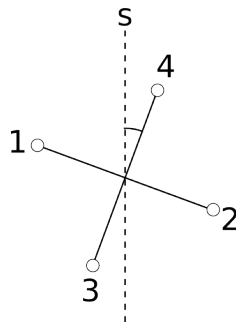
Slika 3.16: Vetrna vreča (vir: *opensoaring.com*).

3.8 Dodatne naloge za vajo

3.8.1

Dvoosni sonični anemometer ima zamaknjeno os za 20° glede na sever (kot kaže tloris anemometra na sliki 3.17). Izmerjeni časi potovanja signalov od oddajnika do nasprotnega sprejemnika so bili sledeči: $t_{1 \rightarrow 2} = 563.4 \mu\text{s}$, $t_{2 \rightarrow 1} = 593.5 \mu\text{s}$, $t_{3 \rightarrow 4} = 610.6 \mu\text{s}$ in $t_{4 \rightarrow 3} = 547.6 \mu\text{s}$.

1. Kolikšni sta zonalna in meridionalna hitrost vetra, če je razdalja med oddajniki in sprejemniki povsod enaka, torej $d_{12} = d_{34} = 20 \text{ cm}$?
2. Sonični anemometri ob hudih nalivih nr izmerijo točnih vrednosti, saj je zelo verjetno, da bo signal potoval deloma tudi skozi kapljico vode. Hitrost potovanja zvoka skozi zrak je pri neki zunanji temperaturi in zračnem pritisku $c_z = 346.5 \text{ m s}^{-1}$, hitrost razširjanja zvoka po vodi pa $c_v = 1484 \text{ m s}^{-1}$. Recimo, da pri potovanju signala od oddajnika 1 do sprejemnika 2 signal potuje $1/100$ celotne poti skozi vodno kapljico. Kolikšen je v tem primeru čas $t_{1 \rightarrow 2}$? Kolikšni pa sta zonalna in meridionalna hitrost vetra? Predpostavi, da se signal na kapljici ne lomi. Smerni vektor, ki določa smer širjenja signala, je torej tudi pri prehodu skozi kapljico enak.



Slika 3.17: Sonični anemometer z zamaknjeno osjo.

3.8.2

Kolikšna je hitrost in kolikšna napaka hitrosti letala, ki za merjenje hitrosti uporablja pitotovo cev? Statični pritisk na začetku pitotove cevi je 578 hPa , pritisk na koncu cevi (vsota statičnega in zastojnega tlaka) pa je 623 hPa . Temperatura okoliškega zraka je -25°C . Natančnost merjenja zračnega tlaka je 2 hPa , natančnost merjenja temperature pa 1 K .

3.8.3

Opiši nihanje vetrokaza kot odziv na stopničasto funkcijo smeri vetra

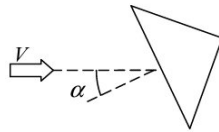
$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \alpha_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Namig: v DE dušenega dihanja nadomesti kot β z $\beta - \alpha$.

3.8.4

S pomočjo dvoosnega modela šalčnega anemometra pojasni, zakaj je ta neprimeren za merjenje vetra ob strmih pobočjih. Predpostavi, da je vektor hitrosti vetra ob pobočju, nagnjenem za 30° glede na vodoravnico, vzporeden s pobočjem. Upoštevaj, da je pri horizontalnem vetru koeficient upora odprtega dela šalčke $c_{D1} = 1.38$, koeficient upora zaprtega dela šalčke pa $c_{D2} = 0.49$. Pri smeri vetra 30° glede na normalo ravnine (Slika 1), ki jo napenja odprt del šalčke, pa se koeficienta upora spremenita: $c_{D1} = 1.56$ in $c_{D2} = 0.32$. Je indicirana hitrost vetra (ki je prenosorazmerna z obodno hitrostjo šalčk) pri pobočnem vetru večja ali manjša od indicirane hitrosti pri enako močnem horizontalnem vetru? Za koliko?

Namig: skiciraj si, kako deluje navor zaradi sile upora pobočnega vetra na šalčke, katerih os vrtenja kaže navpično navzgor.



Slika 3.18: Veter pod kotom α na normalo ravnine odprtega dela šalčke.

Poglavje 4

Merjenje vlage

4.1 Uvod

Merjenje vlage pomeni merjenje količine vodne pare v zraku. To lahko izrazimo z njeno težo, volumnom, delnim pritiskom itd. Količino vodne pare opisujemo s sledečimi količinami:

- absolutna vlaga:

$$\rho_v = \frac{m_v}{V} ,$$

- specifična vlaga:

$$q = \frac{m_v}{m_{\text{zrak}}} = \frac{m_v}{m_d + m_v} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p_d}{R_d T} + \frac{e}{R_v T}} \approx \frac{e}{p} \frac{R}{R_v} ,$$

- razmerje mešanosti:

$$r = \frac{m_v}{m_{\text{zrak}} - m_v} = \frac{e}{p - e} \frac{R}{R_v} ,$$

- parni tlak oz. delni pritisk vodne pare v zraku e . To je pritisk, ki bi ga povzročal plin (vodna para), če bi sam izpolnjeval volumen V ,
- nasičen parni tlak nad vodo $e_s^{(v)}$ in nasičen parni tlak nad ledom $e_s^{(l)}$. Termodinamično je to pritisk vodne pare v zraku, ki je v zaprti posodi v termodinamičnem ravnovesju s površino kapljevine / ledu. Pri višji temperaturi je to ravnovesje pri višjem parnem tlaku, saj se (mikroskopsko gledano) zaradi večje kinetične energije molekul poveča pogostost njihovih prehodov iz vodne gladine v zrak. S povečevanjem števila molekul v zraku se povečuje tudi pogostost prehodov molekul iz zraka nazaj v tekočino. Stanje, ko je v zraku toliko molekul, da sta pogostosti prehodov v zrak in iz zraka nazaj enaki, imenujemo nasičeno. Zrak nad gladino tekočine je torej nasičen in pogovorno “ne more sprejeti več vodne pare” (fizikalno je izraz napačen, saj ni zrak tisti, ki sprejema vlago, temveč določa termodinamično ravnovesje gladina tekočine pod njim). Odvisnost nasičenega pritiska vodne pare od temperature je v diferencialni obliki definirana s Clausius-Clapeyronovo enačbo

$$\frac{de_s}{dt} = \frac{L(T)}{R_v} \frac{e_s}{T^2} ,$$

kjer je $L(T)$ latentna toplota, ki se porablja pri izhlapevanju, R_v pa specifična plinska konstanta za vodno paro.

- relativna vlažnost $f = \frac{e}{e_s}$,

- temperatura rosišča T_D . Temperatura, pri kateri bo vlažen zrak z delnim parnim tlakom e postal nasičen.
- temperatura mokrega termometra T_v .

Poznamo sledeče načine merjenja količine vodne pare v zraku:

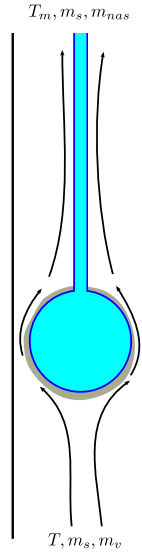
- Izločitev vodne pare iz zraka. Tako delujejo gravimetrični higrometri, ki so najnatančnejši, niso pa primerni za vsakodnevne meteorološke meritve. Uporabljajo jih zgolj v metroloških laboratorijih za umerjanje ostalih higrometrov. Za ločitev vodne pare od suhega zraka se uporabljajo različne higroskopske snovi. Ko jih izpostavimo vlažnemu zraku, se jim poveča masa. Razlika v masi je masa vodne pare. Podobno so delovali najpreprostejši "higrometri" iz 15. stoletja¹. Opazili so namreč, da se masa lesa tekom leta spreminja, saj jo ta absorbira. Drug način izločitve vode iz zraka je tako, da zrak ohlajamo toliko časa, dokler skoraj vsa vodna para ne zaledeni in se izloči. Pri zelo nizkih temperaturah je namreč termodinamično ravnovesje med vodno paro in ledeno površino pri zelo nizkem parnem tlaku, zato je dovolj, če shladimo zrak že npr. do -55°C , pa bo napaka relativne vlage za zrak pri temperaturi $T > 0^\circ\text{C}$ zagotovo manjša od 1 %.
- Dodajanje vodne pare zraku (tudi izkoriščanje toplote, ki se sprosti/porabi pri faznih prehodih). Iz omočene bučke termometra izhlapeva vlaga v zrak (tem bolj ko je vlaga v zraku nizka). Posledično se bučka ohladi, kar pa znamo preprosto pomeriti.
- Izkoriščanje sprememb optičnih lastnosti pri faznem prehodu vode (rosiščni higrometer)-
- Oslabitev sevalnega toka na poti skozi absorptivni medij.
- Merjenje sprememb elastičnih, električnih (upornost, kapacitivnost) lastnosti neke higroskopske snovi.

Kadar so spremembe reverzibilne in ponovljive, jih lahko uporabljamo za vsakodnevno merjenje vlage.

¹Nikolaj Kuzanski (1401-1464), nemški teolog, škof, filozof, matematik, astronom. Prvi je opisal, da je masa lesa odvisna od vlage v njem.

4.2 Psihrometer

Klasičen način merjenja vlage je s psihrometrom (slika 4.1). Psihrometer sestavljata 2 termometra, ki ju postavimo navpično in medseboj vzporedno - imenujemo ju suhi in "mokri". Prvi je običajen termometer. Bučka drugega, mokrega, termometra se nahaja v ozkem tulcu. Okrog bučke je navita tanka tkanina, ki jo navlažimo z destilirano vodo. Voda iz tkanine izhlapeva, pri tem faznem prehodu vode pa se porablja toplota. To odvzame voda bučki termometra in zraku, ki obteka bučko. Posledično je temperatura mokrega termometra T_m nižja od temperature suhega termometra T . Okoli bučke mokrega termometra moramo vzpostaviti tok zraka. Ker je hitrost toka zraka v atmosferi pogosto prenizka, ustrezno prezračevanje dosežemo z ventilacijo v tulcu. Hitrost toka zraka naj bo vsaj $2.5 \text{ m s}^{-1} - 10 \text{ m s}^{-1}$, da maksimiziramo prenos toplote s konvekcijo in izhlapevanje ter da minimiziramo prenos toplote s prevajanjem in sevanjem.



Slika 4.1: Mokri termometer.

Zapišimo energijsko bilanco za zrak okoli bučke mokrega termometra. Na račun latentne toplote, ki se je porabila pri izhlapevanju vode iz tkanine, se ohladita tako suh zrak m_s kot vodna para m_v . Hkrati se zaradi izhlapevanja vode tudi količina vodne pare v zraku poveča - do nasičenega ravnovesja, pri katerem je masa vodne pare m_{nas} . Velja

$$-L \underbrace{(m_{nas} - m_v)}_{\text{masa izhlopele vode}} = \underbrace{m_s c_{ps}(T_m - T)}_{\text{ohlajanje suhega zraka}} + \underbrace{m_{nas} c_{pv} T_m - m_v c_{pv} T}_{\text{ohlajanje vodne pare - te je za bučko več kot pred njo}} .$$

Zgornjo enačbo na obeh straneh delimo z maso suhega zraka m_s . Tako količino vlage v zraku namesto z absolutno vlago izrazimo z razmerjem mešanosti $r = \frac{m_v}{m_s}$ ter nasičenim razmerjem mešanosti $r_{nas} = \frac{m_{nas}}{m_s}$. Zapišemo

$$-L(r_{nas} - r) = c_{ps}(T_m - T) + r_{nas} c_{pv} T_m - r c_{pv} T ,$$

od koder izrazimo razmerje mešanosti

$$r = \frac{c_{ps}(T_m - T) + r_{nas} c_{pv} T_m + r_{nas} L}{c_{pv} T + L} , \quad (4.2.1)$$

odtod pa parni tlak vodne pare kot

$$e = \frac{r R_v p}{R + r R_v}$$

ter relativno vlažnost kot $f = e/e_{nas}(T)$. Pri izračunu nasičenega razmerja mešanosti v enačbi (4.2.1) moramo upoštevati, da je zrak lokalno nasičen v tulcu za bučko termometra pri temperaturi T_m . Velja torej

$$r_{nas} = r_{nas}(T_m) = \frac{e_{nas}(T_m)}{p - e_{nas}(T_m)} \frac{R}{R_v}$$

Slabosti in pogoste napake merjenja vlage s psihrometrom so:

- merjenje temperature mokrega termometra je precej nenatančno (krpica, ventiliranje, vmes odčitavanje),
- namakanje krpice oteži avtomatizem,
- računanje nasičenega parnega tlaka e_s (že samo po sebi vir napake),
- termometra se morata nujno nahajati dovolj daleč od tal (1.5 - 2 metra). Tla so namreč vir vlage,
- tok zraka ne sme nikakor teči od mokrega k suhemu termometru (in slednjega posledično ohladiti).
- pri temperaturah pod 0 °C zamrzovanje bučke mokrega termometra. Namesto da uporabimo krpo, lahko pomočimo bučko v vodo, nato pa vzamemo ven in na bučki pri negativnih temperaturah takoj tanka ledena plast. Nato spet ventiliramo zrak okoli bučke in odčitamo temperaturo mokrega termometra, pri izračunu pa nato namesto latentne izparilne toplote upoštevamo latentno sublimacijsko toploto $L_s = 2.83 \text{ MJ kg}^{-1}$.

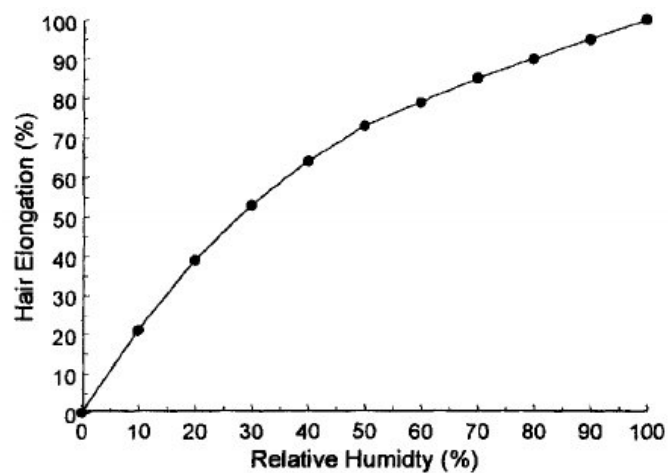
4.2.1 Naloga - snežinka

4.3 Mehanski (lasni) higrometer

Nekatere higroskopne naravne snovi (dlaka sesalcev, rogovje divjadi) so občutljive na količino vodne pare v zraku. Dolžina človeških las se npr. podaljša za 2%, ko se relativna vlažnost poveča iz 0% na 100%. Njihov odziv je običajno močno nelinearen - na sliki 4.2 je prikazano podaljšanje las (kot delež celotnega podaljšanja v odvisnosti od relativne vlažnosti). Nelinearno prenosno funkcijo mehanskih higrometrov lahko deloma kompenziramo s sistemom vzvodov.

Higrometer na lase se uporablja predvsem v higrografih, njegova prednost je, da ne potrebuje za delovanje električne energije. Kljub preprostosti izvedbe pa ceno plačamo s kvaliteto meritev:

- je precej nenatančen - tipično dosežemo natančnost $\pm 5\%$ RH.
- Potrebno ga je pogosto umerjati.
- Raztezanje las je odvisno tudi od temperature, ne le vlage, vendar pa velja, da je $dl/dT \approx \frac{1}{15} dl/df$ za $dT = 1 \text{ K}$ in $df = 1\%$.
- Lasje pri temperaturah po -40°C niso več higroskopne, zato so meritve vlage pod to vrednostjo z lasnim higrometrom nemogoče.
- Histerezni efekti. Razlike v dolžini las so večje, ko se vlaga v zraku povečuje, kot takrat, ko se vlaga znižuje.
- Časovna konstanta (oz. odzivni čas senzorja) je večja pri nižji temperaturi (30 sekund pri -30°C in 10 sekund pri 20°C).

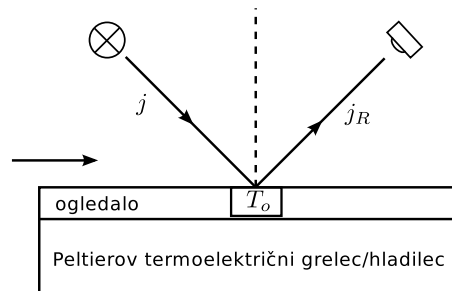


Slika 4.2: Delež celotnega podaljšanja las (to je enako 2% dolžine las) kot močno nelinearna funkcija relativne vlažnosti.

4.4 Rosiščni higrometer

Pri rosiščnem higrometru grejemo/hladimo ogledalo iz polirane kovine in spremljamo, pri kateri temperaturi rosišča T_d se bo to orosilo. Če poznamo še zunanjo temperaturo T , lahko relativno vlažnost preprosto izračunamo.

Priprava za merjenje temperature z rosiščnim higrometrom (slika 4.3) vsebuje LED izvor svetlobe, ki usmeri tanek snop svetlobe na ogrevano/hlajeno ogledalo. Na isti strani ogledala se nahaja še fotodektor, ki izmeri gostoto svetlobnega toka. Če je gostota svetlobnega toka odbite svetlobe $j_R \approx j$, potem je prišlo do popolnega odboja in ogledalo ni orošeno, torej je temperatura ogledala T_o večja od temperature rosišča T_d , torej $T_o > T_d$. Potem ogledalo hladimo, dokler ne doseže temperature rosišča. Takrat gostota odbitega svetlobnega toka močno pade ($j_R \ll j$), svetloba se namreč na kapljicah vode na ogledalu odbije difuzno tudi v ostale smeri.



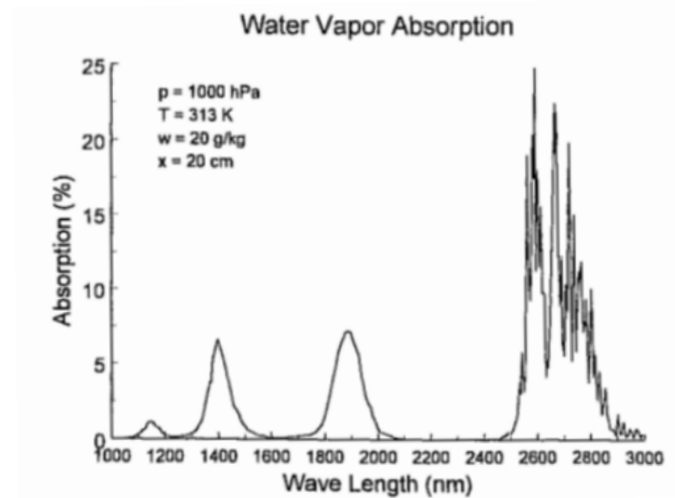
Slika 4.3: Priprava za merjenje temperature z rosiščnim higrometrom.

Ogledalo grejemo/hladimo s Peltierovim termoelektričnim grelcem/hladilcem. Temperaturo površine ogledala merimo z uporovnim termometrom, ki mora biti čim bližje površini. Viri napak pri merjenju vlage z rosiščnim higrometrom so sledeči:

- Nasičen parni tlak je definiran nad ravno površino. Kadar se kondenz oblikuje v obliki zelo majhnih kapljic, je ukrivljenost površine velika. Tanka plast vode sicer po načelu minimizacije energije vedno teži k temu, da je njena površina čim manjša (in s tem hkrati površinska energija), zato namesto kontinuirane tanke vodne plasti najprej nastanejo posamezne kapljice. Posledično je nasičen parni tlak višji, zaradi česar izmerimo nižjo temperaturo rosišča ter posledično nižjo vlago, kot je dejanska.
- Pri temperaturah pod lediščem se v začetku lahko vlaga v zraku izloči kot voda, ki se potem še nadalje ohlaja (podhlajena kapljevina), čeprav predvidevamo, da se bo izločila kot led (nasičen parni tlak nad vodno gladino je seveda različen od nasičenega parnega tlaka na ledom).
- Umazanija na zrcalu.

4.5 Spektroskopski higrometer

Spektroskopski higrometer meri oslabitev sevalnega toka pri neki valovni dolžini, pri kateri je vedona para močan absoerber. Bolj ko je zrak vlažen, močnejša je oslabitev. Oslabitev sevalnega toka z razdaljo opisuje Beer-Lambertov zakon



Slika 4.4: Absorptivnost vodne pare v IR delu spektra pri dolžini poti žarka 20 cm in razmerju mešanosti 20 g kg⁻¹.

$$I_{\lambda}(x) = I_{\lambda 0} \exp(-k_{\lambda} \rho_v x),$$

kjer je $I_{\lambda 0}$ sevalni tok pri neki valovni dolžini λ na izvoru, x dolžina poti, ρ_v absolutna vlažnost zraka v kg m⁻³, reducirana na izhodiščni nivo standardne atmosfere ($p_{00} = 1013.25$ hPa, $T_{00} = 273.15$ K), parameter k_{λ} pa je vnaprej poznani in izmerjeni absorpcijski koeficient. Potem je prepustnost skozi neko pot v atmosferi enaka $\tau = I_{\lambda}(x)/I_{\lambda 0}$, absorptivnost pa $a = 1 - \tau$.

Idealna pasovna širina (interval valovnih dolžin) za meritev oslabitve toka bi bila pri tistih valovnih dolžinah, kjer ni absorber noben drug plin - tam bi torej Beer-Lambertov zakon točno veljal. Glede na sliko 4.4 je primerno območje v IR delu spektra med 1000 nm in 3000 nm, ker je v tem območju tudi sevanje ozadja (Sonce in Zemlje) dovolj šibko. Praktični higroskopski higrometri uporabljajo dve spektralna pasova, enega v območju valovnih dolžin, kjer je vlaga absorber (2600 nm) in drugega v območju, kjer vlaga ni absorber (npr. pri 2300 nm). Drugi služi zgolj za nadzor nad delovanjem higrometra (torej mora biti $I_{\lambda}(x) \approx I_{\lambda 0}$), npr. če se je na steklu pred izvorom nabrala umazanija ali pa so se lastnosti stekla spremenile.

4.6 Dodatne naloge za vajo

4.6.1

Kolikšna je napaka izračunanega nasičenega parnega tlaka pri 30°C , če upoštevamo, da je latentna toplota, ki se porabi pri hlapenju vodne pare, konstantna ($L = L_0 = 2.5 \text{ MJ kg}^{-1}$) in ne linearno odvisna od temperature ($L(T) = L_0(1 + \alpha(T - T_0))$). Linearni koeficient $\alpha = -9.477 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, nasičen parni tlak pri trojni točki, torej $T_0 = 273.15 \text{ K}$ pa je enak $e_{s0} = 6.11 \text{ hPa}$.

4.6.2

Temperatura je 20°C , temperatura rosišča pa 12°C . Kolikšna je relativna vlažnost zraka?

4.6.3

Temperatura je 20°C , temperatura mokrega termometra pa 17°C . Specifična toplota suhega zraka pri standardnem pritisku je $1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, specifična toplota vodne pare $1996 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, latentna izparilna toplota pa 2.5 MJ kg^{-1} .

4.6.4

Pričakujemo, da se pri temperaturah nižjih od ledišča na rosiščnem higrometru izloči led. Kolikšna je napaka izračunane relativne vlažnosti, če se je pri -10°C namesto ledu na higrometru izločila podhlajena voda? Na higrometru prikazana temperatura rosišča je -14°C . Latentna izparilna entalpija je 2.5 MJ kg^{-1} , latentna sublimacijska entalpija pa 2.83 MJ kg^{-1} .

4.6.5

V meteorološki hišici izmerimo temperaturo suhega termometra 27.7°C ter temperaturo mokrega termometra 21.3°C . Iz barometra odčitamo vrednost zračnega pritiska - ta je 1023 hPa . Kolikšna je relativna vlažnost? Kolikšna pa je masa vodne pare v kubičnem metru zraka?

4.6.6

V zaprti kraški kotlini skledaste oblike z globino $h_0 = 400 \text{ m}$ ima zrak povsod enako temperaturo 26°C in 70% relativno vlažnost. Premer kotline se z višino spreminja kot $r(h) = r_0 \sqrt{\frac{h}{h_0}}$, kjer je maksimalni polmer kotline enak $r_0 = 2000 \text{ m}$.

1. Kolikšna sta parni tlak in nasičen parni tlak v kotlini?
2. Izračunaj maso vodne pare v kotlini!
3. Izračunaj maso suhega zraka v kotlini. Upoštevaj, da so na dnu kotline izmerili zračni pritisk 941 hPa .

Namig: upoštevaj tudi potek gostote zraka z višino ter dejstvo, da je skupni pritisk vsota delnih pritiskov suhega zraka in vodne pare. V enačbi za potek tlaka v izotermni atmosferi lahko upravičeno predpostaviš, da je specifična plinska konstanta za mešanico suhega zraka in vodne pare enaka $R = \frac{R_d + r(h)R_v}{1 + r(h)} \approx R_d$.

4. Kasneje prične deževati. Vodne kapljice pri padanju izhlapevajo v nenasičen okoliški zrak in sčasoma zrak v kotlini postane nasičeno vlažen. Pri tem se ohladi. Kakšna je temperatura zraka v kotlini po deževju?

Podatki k nalogi: $c_{pd} = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}$, $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}$, $c_{pv} = 1832 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}$, $R_v = 461.5 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}$, $L = 2.5 \text{ MJ kg}^{-1}$.

4.6.7

S termometrom izmerimo temperaturo zraka 22°C , z rosiščnim higrometrom pa izmerimo temperaturo rosišča 16°C . Kolikšna je absolutna napaka izračunane relativne vlažnosti, če je napaka meritve temperature $\Delta T = 0.5 \text{ K}$, napaka meritve temperature rosišča pa $\Delta T_d = 1 \text{ K}$?

Namig: najprej zapiši relativno vlažnost kot funkcijo temperature in temperature rosišča, torej $f = f(T, T_d)$. Nato zapiši za slednjo absolutno napako, ki se v linearnem (prvem) redu izrazi kot $df = \left| \frac{\partial f}{\partial T} \right| dT + \left| \frac{\partial f}{\partial T_d} \right| dT_d$. Kolikšna pa je relativna napaka df/f ?

4.6.8 (težja)

Kolikšna je pri psihrometru napaka relativne vlažnosti, če je napaka izmerjene temperature mokrega termometra 0.1°C ? Zunanja temperatura je 0°C , temperatura mokrega termometra pa -1°C , zunanji zračni pritisk pa 1000 hPa .

4.6.9

Snežinka pri padanju skozi nenasičeno ozračje izhlapeva v okolišnji zrak. Ali se bo pri temperaturi zraka 2°C že začela topiti, če je relativna vlaga 70% . Zračni pritisk je 1000 hPa . Latentna sublimacijska toplota za ledene delce je približno 2.83 MJ kg^{-1} , specifična toplota suhega zraka $1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, specifična toplota vodne pare pa $1996 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Nalogo reši numerično, npr. z bisekcijo.

[TEŽJE] Izračunaj, pri kateri temperaturi zraka pa se bo pri navedeni zračni vlagi začela snežinka topiti!

4.6.10

Meteorološka postaja je na nadmorski višini 1000 m . Višina živosrebrnega stolpca v termometru je 71 cm ($\rho_{\text{Hg}} = 13500 \text{ kg m}^{-3}$). Izračunati želimo tlak na morskem nivoju ob predpostavki, da je atmosfera izotermna ($T = \text{konst.}$), a se je inštrument za merjenje temperature pokvaril. Na srečo imamo še psihrometer, ki nam pokaže temperaturo mokrega termometra 10°C in inštrument za merjenje temperature rosišča (npr. rosiščni higrometer), ki izmeri 5°C . Kakšen je torej tlak na morskem nivoju?

Namig: upoštevaj energijsko bilanco psihrometra. Izrazi nasičeno razmerje mešanosti v tulcu za bučko, torej $r_{\text{nas}}(T_m)$. Dejansko razmerje mešanosti v zraku pa izračunamo z upoštevanjem, da je parni tlak enak nasičenemu parnemu tlak pri temperaturi rosišča (torej $e = e_s(T_d)$, $f = 100\%$).

Poglavje 5

Merjenje izhlapevanja

5.1 Uvod

Merjenje izhlapevanja je pomembno iz dveh razlogov:

- Izhlapevanje je najpomembnejši **vir vode v atmosferi**, zato predstavlja pomemben spodnji robni pogoj za napovedovanje vremena.
- Razlika med padavinami, izhlapevanjem in odtokom vode predstavlja vodo, ki je na voljo rastlinam. Poznavanje trenutnega stanja tal nam omogoča načrtovanje ukrepov v **kmetijstvu** (npr. namakanje).

Direktno merjenje izhlapevanja je tehnično nemogoče, zato izhlapevanje merimo posredno. Obstaja več različnih načinov, odvisno kaj nas zanima. V vsakem primeru želimo simulirati izhlapevanje v naravi, vendar je večina metod le bolj ali manj dober model realnega dogajanja. V splošnem delimo merilne inštrumente na tri skupine:

- izhlapevalne posode,
- atmometri (evaporimetri),
- evapotranspirometri (lizimetri).

Z **izhlapevalnimi posodami** merimo maso oz. prostornino vode, ki izhlapi iz merilne posode z odprto vodno površino. Primer takšne merilne posode je t.i. **A posoda** (slika 5.1). To je valjasta kovinska posoda, goboka približno 25 cm, s premerom približno 120 cm. V njej je nalita voda. Meritve potekajo tako, da merimo spreminjanje višine gladine vode (v mm). Količino izhlapele vode lahko opišemo z enačbo

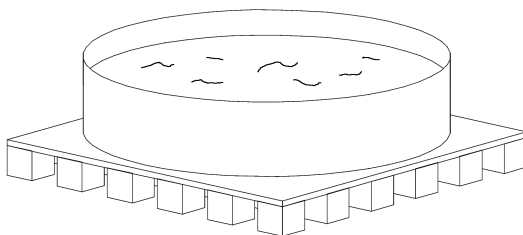
$$\frac{dm}{dt} = C (1 - RH) ,$$

kjer je C koeficient, ki opisuje vplive vetra, sevanja in temperature (zraka in vode v posodi). Vse tri količine vplivajo na hitrost izhlapevanja vode. Veter z advekcijo vlažnega zraka stran od posode, sevanje in temperatura pa z dodajanjem energije, potrebne za izhlapevanje. RH je relativna vlaga, od katere je odvisno koliko vode lahko še izhlapi v zrak.

Da se prepreči direktna izmenjava toplote s tlemi, je posoda praviloma postavljena na lesene nosilce (podobne lesenim paletam v skladiščih).

Na višino gladine poleg izhlapevanja vplivajo tudi padavine, a njihovo količino merimo in jo lahko odštejemo. Paziti moramo le, da nam pri večjih količinah padavin voda ne teče čez rob posode. V tem primeru moramo vodo kontrolirano odstranjevati (in količino odstranjene vode meriti).

Ostali dejavniki, ki jih moramo upoštevati pri meritvah so:



Slika 5.1: Skica A posode.

- *sončno sevanje* - posoda mora biti na odprtem mestu, da je lahko ves čas obsijana s soncem. Posoda mora biti dovolj daleč od ovir. Skrbeti moramo, da je gladina vode ves čas približno konstantna, da rob posode ne meče prevelike sence. Hkrati pa vode ne smemo natočiti do vrha posode, da nam zaradi padavin ne teče čez rob. Praviloma mora biti gladina vode 5 cm pod robom posode.
- *izmenjava toplote z okolico* - Posoda je dvignjena od tal, da ni direktnega izmenjevanja toplote s tlemi, s približno konstantno količino vode v posodi pa kontroliramo toplotno kapaciteto sistema posode in vode.
- *veter* - veter mora nemoteno pihati preko posode, saj vpliva na hitrost izhlapevanja. Paziti moramo, da nam ne pljuska vode iz posode in ne nanaša umazanije (npr. drevesnih listov).
- *namakalni sistemi v okolici* - lahko nam nehote škropijo vodo v posodo, zato mora biti posoda dovolj daleč stran od takšnih sistemov (vsaj 100 m).
- *trava v okolici* - mora biti pokošena na višino, ki ne moti meritev.
- *umazanija* - posodo je potrebno redno čistiti.
- *živali* - bi radi pile in se kopale.

Manjšo izvedbo tega lahko postavimo v meteorološko hišico in spremembe količine vode tehtamo. V tem primeru nimamo direktnega vpliva sončnega sevanja.

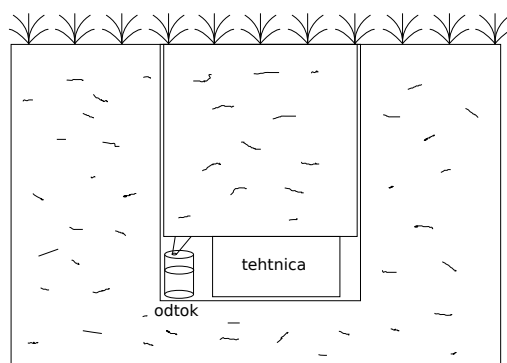
Pri **atmometrih** gre za meritve prostornine vode, ki izhlapi iz namočenega poroznega materiala (papirja, keramike, ...). Primer takšnega inštrumenta je **Pichéjev evapori-meter** (slika 5.2). Sestavljen je iz narobe obrnjene valjaste merilne posode (epruvete) napolnjene z vodo in papirčka (pivnika), ki na spodnji strani zapira posodo. Voda iz merilnega valja moči papirček, iz katerega izhlapeva voda. Količino izhlapele vode preberemo kot spremembo višine gladine vode v merilni posodi. Tak merilnik je dovolj majhen, da ga lahko postavimo v meteorološko hišico. Tudi v tem primeru nimamo direktnega vpliva sončnega sevanja.

Opisani metodi le slabo simulirata dogajanje v naravi, saj ne upoštevata rastja, ki črpa vodo iz tal in jo z dihanjem oddaja v atmosfero.

Boljši model dogajanja v naravi dobimo z **lizimetrom** (slika 5.3). V osnovi gre za v zemljo vkopano posodo, v kateri simuliramo okoliško evapotranspiracijo (dejansko izhlapevanje iz tal z upoštevanjem vseh lastnosti prsti in rastja). V posodi naj bi tako bil enak profil prsti kot v okolici, ravno tako pa naj bi na vrhu rastlo enako rastje kot v okolici. Iz posode mora biti urejen odtok, ki mora biti takšen, da čim bolj posnema naravni odtok vode iz prsti v okolici (sicer se nam padavinska voda kopiči v posodi, ali nam prekomerno odteka). S tehtanjem posode spremljamo količino vode v posodi. Glede na znano količino padavin in kontroliran ter merjen odtok, lahko s spremljanjem mase vsebine posode spremljamo izhlapevanje.



Slika 5.2: Skica Pichéjevega evaporimetra.



Slika 5.3: Skica lizimetra.

Takšne meritve so zahtevne za izvedbo, a pravilno izvedene dajo najboljši vpogled v stanje tal v okolici, zato so zelo pomembne za kmetijstvo. Težava je tudi v tem, da je sprememba mase vode v posodi zaradi evapotranspiracije precej manjša od sprememb zaradi padavin in odtoka, zato morajo biti meritve zelo natančno izvedene.

Pomembno je, da skrbimo, da je rastje enako kot v okolici, travo kosimo na približno enako višino, da na površju ni listja in smeti, ki bi preprečevale padavinam vstop v zemljo.

Večina težav takšnega merjenja izhaja iz dejstva, da je naš sistem precej izoliran od okolice - ni zadostne izmenjave toplote, vlage, hranil, rastje ima lahko premalo prostora za pravilen razvoj koreninskega sistema.

5.2 Naloge

5.2.1 Naloga - Izhlapovanje zaradi vetra

Preko A posode piha veter s hitrostjo 8 m/s, kar povzroča tok vodne pare v zrak $5 \cdot 10^{-5}$ kg/m² s. Koliko vode (v mm) izhlapi v času, ko je zrak prepotoval 100 km?

Zrak prepotuje 100 km v $t = v/s = 12500$ s = 3.47 h. Izhlapovanje vode v zrak opišemo z masnim tokom:

$$\frac{dm}{dt} = \Phi .$$

Zanima nas sprememba gladine vode v posodi, zato zapišemo $m = \rho Sh$ in to vstavimo v enačbo za masni tok. Ker je izhlapevanje konstantno, integriranje ne predstavlja težav. Upoštevamo, da imamo podan masni tok na enoto površine. Rezultat je tako

$$h = \frac{\Phi}{S\rho} t = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}} \frac{1}{1000\text{kg/m}^3} 12500 \text{ s} = 0,625 \text{ mm} .$$

Opomba: Ta naloga je zelo enostavna in predvsem namenjena temu, da študenti obudijo spomin na masni tok ter da dobijo občutek za hitrost izhlapevanja.

5.2.2 Naloga - Izhlapovanje zaradi sončevega sevanja

Na jasen dan je gostota energijskega toka direktnega sončnega sevanja 900 W/m², difuznega pa 100 W/m². Maksimalna višina sonca na nebu je 60°, predpostavi, da se višina sonca na nebu linearno spreminja s časom (zaradi lažje integracije) in da je dan dolg 12 h. Koliko vode bi izhlapelo iz A posode v enem dnevu, če predpostaviš, da se vsa vpadla energija porabi za izhlapevanje vode? Pri tem ne upoštevaj drugih prispevkov k izhlapevanju. Koliko vode bi moral v tem primeru naliti v posodo, da bi bila višina gladine 5 cm pod robom posode? V resnici bi v takšnih razmerah zaradi sončevega sevanja izhlapelo približno 2 mm vode. Kolikšen je izkoristek?

Višina sonca na nebu se dopoldan spreminja kot

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{t_0} t ,$$

kjer je $\vartheta_0 = 60^\circ$ in $t_0 = 6$ h (polovica dneva). Popoldan se spreminja na enak način, le da višina sonca upada od maksimalne do nič. Ker nas zanima le celoten prispevek preko dneva, lahko simetrijo upoštevamo pri integriranju, saj sta prispevka dopoldan in popoldan enaka. V nadaljevanju si bomo tako ogledali le dopoldansko dogajanje.

Gostota energijskega toka je sestavljena iz prispevkov direktnega sevanja in difuznega sevanja, pri čemer je pri direktnem sevanju potrebno upoštevati še kot med žarki in površino, na katero vpada sevanje. Torej:

$$j = j_{dir} \sin\left(\frac{\vartheta_0}{t_0} t\right) + j_{dif} ,$$

kjer je L latentna toplota (2.5 MJ/kg) in ρ gostota vode. Tisto kar bo segrevalo vodo, je vpadla moč $P = jS$. Moč, potrebna za izhlapevanje vode pa je:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Ldm}{dt} = \frac{L\rho Sdh}{dt} .$$

Naloga pravi, da se celotna vpadla moč sevanja porabi za izhlapevanje vode. Velja torej:

$$\frac{L\rho S dh}{dt} = \left(j_{dir} \sin\left(\frac{\vartheta_0}{t_0}t\right) + j_{dif} \right) S.$$

Vidimo, da se površina pojavlja na obeh straneh enačbe. To pomeni, da je sprememba višine gladine vode neodvisna od površine vodnega telesa iz katerega voda izhlapeva (v danem primeru A posode).

Zgornjo enačbo integriramo, pri čemer s faktorjem 2 upoštevamo prospevka dopoldneva in popoldneva.

$$\begin{aligned} \int_0^h dh &= \frac{2}{L\rho} \int_0^{t_0} \left(j_{dir} \sin\left(\frac{\vartheta_0}{t_0}t\right) + j_{dif} \right) dt \\ h &= \frac{2}{L\rho} j_{dif} t_0 - \frac{2}{L\rho} j_{dir} \frac{t_0}{\vartheta_0} \cos\left(\frac{\vartheta_0}{t_0}t\right) \Big|_0^{t_0} \\ &= \frac{2t_0}{L\rho} \left(j_{dif} + j_{dir} \frac{1 - \cos \vartheta_0}{\vartheta_0} \right). \end{aligned}$$

Rezultat je $h = 9.16 \text{ mm}$.

Naslednje vprašanje je, koliko vode bi morali v tem primeru doliti. Prostornina dolite vode je enaka produktu spremembe višine gladine (h) in površine posode ($S = \pi r^2$). Torej

$$V = h\pi r^2 = 9.16 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot (0.6 \text{ m})^2 \pi = 10.41 \text{ l}.$$

Še izkoristek: $\eta = h_{dej}/h_{teor} = 2 \text{ mm}/9.16 \text{ mm} = 22 \%$.

5.2.3 Naloga - Izhlapevanje vode zaradi vpliva temperature

Zvečer se nad tlemi vzpostavi mirujoča plast zraka, ki ima začetno temperaturo 15°C . Preko 12 h dolge noči se ta plast ohladi za 5°C , ohlajanje ima sinusno krivuljo. Masni tok vode v odvisnosti od temperature lahko opišemo z enačbo $\Phi = \Phi_0 + k(T - T_0)$, kjer je Φ_0 masni tok pri $T_0 = 15^\circ\text{C}$. Poznamo $\Phi_0/S = 10^{-5} \text{ kg/sm}^2$ in $k = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ kg/Ks}$. Koliko vode izhlapi iz A posode preko noči, če je vlažnost dovolj nizka, da nima bistvenega vpliva na izhlapevanje?

Temperatura se preko noči spreminja kot

$$T = T_0 - \Delta T \sin\left(\frac{\pi}{2t_0}t\right),$$

kjer je $\Delta T = 5^\circ\text{C}$, masni tok pa kot

$$\Phi = \Phi_0 - k\Delta T \sin\left(\frac{\pi}{2t_0}t\right).$$

Upoštevamo definicijo masnega toka $\Phi = dm/dt = \rho S dh/dt$ in dobimo enačbo

$$\rho S dh/dt = \Phi_0 - k\Delta T \sin\left(\frac{\pi}{2t_0}t\right).$$

Integriramo in dobimo:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Phi_0}{\rho S} t_0 - \frac{k\Delta T}{\rho S} \frac{2t_0}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\Phi_0}{\rho S} t_0 - \frac{k\Delta T}{\rho S} \frac{2t_0}{\pi}. \end{aligned}$$

Vstavimo številke in dobimo $h = 0.226 \text{ mm}$.

Poglavje 6

Merjenje sevanja

6.1 Uvod

Pri merjenju sevanja nas zanimajo tri spektralna območja:

- vidno,
- infrardeče (IR),
- ultravijolično (UV).

Sonce oddaja vse tri, tla in atmosfera le IR. Sončno sevanje v atmosferi ima dva prispevka - direktni del, sestavljen iz žarkov, ki prihajajo direktno od sonca, in difuzni del, sestavljen iz žarkov, ki so se sipali v atmosferi. Pri sončnem sevanju merimo trajanje in gostoto energijskega toka, pri Zemeljskem (tla, atmosfera) pa le gostoto toka, saj seva preprečeno.

Meritve sončevega sevanja so pomembne za klimatologijo, zdravje ljudi (potrebujemo določeno količino sevanja, a UV del spektra je škodljiv), prostorsko planiranje (lega in orientacija zgradb), kmetijstvo (rastline imajo različne potrebe po sončevem sevanju), itd.

Trajanje sončevega sevanja lahko merimo z različnimi inštrumenti, ki so sposobni meriti čas, ko je sončev obsev (= osvetljenost) večja od določenega praga (120 W/m^2). Klasičen inštrument za merjenje trajanja sevanja je **heliograf** (pri nas se uporablja Campbell Stokesov heliograf, slika 6.1). Sestavlja ga steklena zbiralna (krogelna) leča, ki žge sled v papir. Papir ima časovno skalo, tako da lahko po dolžini sledi določimo čas trajanja. Pri takšnih meritvah moramo paziti, da je podstavek heliografa postavljen natančno naravnost in da je heliograf pravilno orientiran (v smeri sever-jug). Ostale težave takšnega heliografa:

- *umazana leča* (tudi pokritost s snegom, ledom, vodo) - Lečo je treba redno čistiti.
- *interpretacija meritev* - Zaradi različnih motenj (oblaki ipd.) sled ni enakomerno prežgana. Kako to upoštevati? Obstajajo pravila, ki se jih je potrebno dosledno držati.
- *oblaki* - Lahko je oblačno, a sonce sije skozi edino luknjo na nebu, lahko je ravno obratno. Oblaki so lahko različno prosojni.
- *spreminjanje višine sonca preko leta* - Merilni trakovi so različni za različne letne čase.
- *ptiči* - Kakajo in se igrajo s papirčki (čisto zares).



Slika 6.1: Heliograf (Vir: www.kuriositas.com).

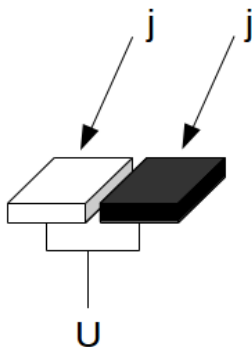
- *kraje leče* - Menda je to največkrat ukraden del kakšnega meteorološkega inštrumenta v Sloveniji.

Heliograf je precej nenatančen inštrument, še vedno precej odvisen od človeške interpretacije meritev. Uporabljamo ga še vedno, ker ponekod obstajajo zelo dolgi nizi podatkov (100-150 let) in ker je zelo enostaven za uporabo (ne potrebuje elektrike, ...).

Pri energiji sončevega sevanja ločeno merimo:

- *globalno sevanje* - To je najbolj običajna meritev. Merimo vse kar pride na vodoravno površino od sonca in atmosfere. Tako se meri vsota sončnega sevanja (direktni in difuzni del) ter IR sevanja atmosfere.
- *direktno sevanje* - Samo prispevek direktno od sonca, brez sipanja v atmosferi.
- *cirkumglobalno sevanje* - vse kar pride od sonca, atmosfere in tal (vse kar pride od zgoraj in od spodaj)
- *neto sevanje* - Razlika prejetega in oddanega sevanja.
- *difuzno sevanje* - Razlika globalnega in direktnega sevanja.

Inštrumenti za merjenje gostote energijskega toka sevanja se imenujejo **radiometri**. Njihovi senzorji večinoma delujejo po kalorimetričnem principu. V osnovi jih sestavljata bela in črna kovinska ploščica, ki se zaradi različnega albeda različno segrevata (slika 6.2).



Slika 6.2: Skica delovanja radiometra.

Enačbi za belo in črno ploščico, približno v ravnovesju:

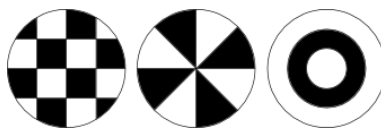
$$\begin{aligned}(1 - a_b)j &= \epsilon\sigma T_b^4 + Q_b \\ (1 - a_c)j &= \epsilon\sigma T_c^4 + Q_c.\end{aligned}$$

Ko enačbo za belo ploščico odštejemo od enačbe za črno ploščico, dobimo:

$$(a_c - a_b)j = \sigma\epsilon(T_c^4 - T_b^4) + (Q_c - Q_b).$$

Konstante a_c , a_b in ϵ poznamo (načeloma sicer bolj slabo), j želimo določiti, T_b in T_c merimo, razlika Q_b in Q_c pa predstavlja napako zaradi toplotnih tokov med ploščicama in ostalimi deli radiometra. S pametno izvedbo radiometra želimo to razliko čim bolj zmanjšati. Nekateri deli radiometra so zato narejeni iz masivnih kosov kovine, da imajo čim večjo toplotno kapaciteto. Deli radiometrov, ki niso senzorji, pa so pokriti z belim ščitom, da se kar največ sevanja odbije. Obe temperaturi lahko merimo, načeloma s termočlenom, lahko pa belo ploščico grejemo na temperaturo črne ploščice in gostoto energijskega toka sevanja računamo iz porabe električne energije za segravanje ploščice.

Za enakomerno osvetljenost črne in bele ploščice, se ponavadi ne uporabljata dve ločeni ploščici, temveč so beli in črni deli senzorja razporejeni v različne vzorce (slika 6.3).



Slika 6.3: Nekaj primerov vzorcev, ki jih najdemo pri senzorjih radiometra.

Nekateri senzorji so pokriti s kupolami. Kemijska sestava kupole določa del spektra, ki ga lahko merimo (vidni, UV, IR). Kupole so lahko iz različnih vrst stekla ali plastičnih mas. Poleg kupole lahko merjeni del spektra dodatno zožimo s primernimi filtri.

Paziti je potrebno, da z različnimi ščiti, kupolami in filtri ne zmanjšamo preveč prostorskega kota meritev. Skrbeti moramo tudi, da je kupola vedno čista in da v primeru prevelike obledelosti senzorjev le-te pravočasno zamenjamo.

Zelo pomembna je postavitev senzorjev, saj morajo biti dovolj stran od zgradb in dreves, da ne mečejo sence na inštrumente in da zaobjamemo čim večjo površino neba. Okoliške zgradbe lahko vplivajo na meritev tudi s svojim IR sevanjem. Inštrumente za merjenje sončevega sevanja se tako pogosto postavlja na strehe.

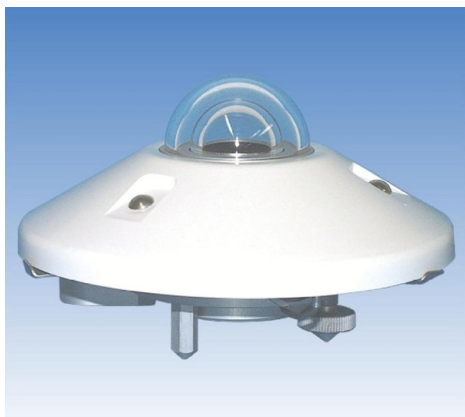
Poleg kalorimetričnih senzorjev obstajajo tudi polprevodniški, pri katerih merimo električni tok zaradi vpadlih fotonov. Težavi takšnih senzorjev sta zelo različen odziv pri različnih frekvencah in omejen spekter, ki ga lahko merimo.

Nekaj radiometrov (predpona pir pomeni, da merimo sevanje iz polprostora, slika 6.4):

- **piranometer** - najbolj splošen radiometer. Kaj merimo z njim je odvisno od tega, kako je obrnjen. Uporablja za vidni del spektra. Če je senzor obrnjen navzgor, merimo globalno sevanje. Če mu dodamo zaslon, ki zastira sonce, merimo difuzno sevanje (v tem primeru moramo na dnevni bazi skrbeti, da je zaslon pravilno nameščen). Če je obrnjen navzdol, merimo od tal odbito sevanje in difuzno sevanje.
- **pirgeometer** - za merjenje sevanja tal (podoben kot piranometer, lahko brez kupole, obrnjen navzdol)
- **pirradiometer** - merjenje globalnega sevanja, vsota vidnega in IR dela

- **pirheliometer** - za merjenje direktnega sevanja. Ta inštrument izgleda malo drugače, zato bo v nadaljevanju posebej opisan.
- **fotometer** - pirheliometer za merjenje v ozkem frekvenčnem pasu

Pirheliometer je inštrument za merjenje direktnega sončnega sevanja. Izgleda kot majhen teleskop. Senzor je nameščen v dno cevi, ki ima na drugi strani zaslonko. Zaradi večih delov inštrumenta, ki obdajajo senzor, je potrebno še posebej paziti na izmenjavo toplote med posameznimi deli inštrumenta (merimo npr. tudi temperaturo ohišja, senzor pa je v masivni medeninasti plošči). Tudi senzor je lahko malo drugačen - dve črni ploščici, od tega je ena zakrita, tako da sončevo sevanje ne vpada nanjo. S segrevanjem te ploščice do temperature nezakrite ploščice lahko določimo gostoto energijskega toka direktnega sončevega sevanja. Poleg tega pirheliometer potrebuje tudi mehanizem, ki skrbi, da je ves čas obrnjen direktno proti soncu.



Slika 6.4: Levo: piranometer (Vir: badc.nerc.ac.uk), desno: pirheliometer (Vir: www.volker-quaschnig.de).

Obstaja še nekaj posebnih merilnikov sevanja. Dva izmed njih sta opisana v nadaljevanju.

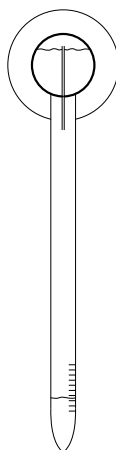
Bellanijev radiometer (slika 6.5) je zelo preprost inštrument, ki za merjenje gostote energijskega toka uporablja toplotne učinke sevanja na tekočino. Tekočina v zaprti, potemnjeni bučki izhlapeva, in se v ohlajenem delu kondenzira. Količino vpadlega sevanja določimo z volumnom kondenzirane tekočine:

$$jS = L \frac{dm}{dt}.$$

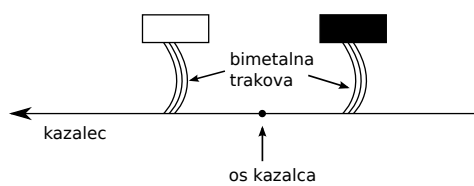
Aktinometer (slika 6.6) je inštrument za merjenje toplotnih učinkov sevanja. Sestavljen je iz črne in bele ploščice, ki sta, vsaka s svojim bimetalnim trakom, povezani s kazalcem. Črna ploščica se segreje bolj kot bela, njen bimetalni trak se bolj raztegne in kazalec se premakne. Tak inštrument je zelo nenatančen in se uporablja le redko.

Druga izvedba deluje na spremembi barve snovi zaradi vpadlega sevanja (npr. zaradi kemijske reakcije).

Aktinometri se uporabljajo v fotografiji, za določitev časa ekspozicije.



Slika 6.5: Skica Bellanijevega radiometra.



Slika 6.6: Skica aktinometra na bimetalni trak.

6.2 Mejenje UV sevanja

Merjenje UV sevanja je pomembno zaradi njegove škodljivosti za zdravje.

Dva načina merjenja:

- *diferencialno merjenje* - izmerimo sevanje celotnega spektra in od njega odštejemo vidni in IR del,
- *direktno merjenje* - neželjene frekvence sfiltriramo z uporabo ustreznih filtrov, ali uporabimo snov, ki reagira na UV svetlobo (npr. začne svetiti).

Težave pri merjenju UV sevanja:

- *obsežen del spektra* - UV spekter zaseda precej širok del EM spektra. Kateri del meriti? Različni inštrumenti merijo pri različnih valovnih dolžinah in njihove meritve med seboj niso primerljive.
- *količina UV sevanja, ki pride do tal* je zelo odvisna od vremena in dolžine poti sončnih žarkov skozi atmosfero.
- UV sevanje se odbija od vode, a absorbira v prsti in rastju

6.3 Naloge

6.3.1 Naloga - Preprost radiometer

Radiometrski senzor je sestavljen iz črne in bele ploščice. Albedo bele ploščice je 0.95, črne pa 0.05. Ker sta obe ploščici iz istega materiala, imata enako emisivnost, 0.95. Koeficient prevajanja (kondukcije) med posamezno ploščico in zrakom (senzor ni zaprt v kupoli) je $20 \text{ W/m}^2\text{K}$. Temperatura črne ploščice je 30°C , bele pa 15°C . Temperatura zraka je ravno tako 15°C .

- Kolikšna gostota energijskega toka pride na ploščico od sonca in kolikšna od atmosfere?
- Sonce zakrijejo oblaki. Kolikšna je gostota energijskega toka difuznega sevanja, če se črna ploščica ohladi na 16°C ?

Predpostavimo, da sta obe ploščici dobro izolirani proti podlagi. Prenos energije zaradi razlik v temperaturi med posamezno ploščico in zrakom opiše enačba $P = KS\Delta T$, gostota energijskega toka pa je $j = K\Delta T$.

- Najprej zapišemo energijski bilanci za obe ploščici. Ker merimo v ravnovesju velja, da je oddana moč enaka sprejeti (velja za vsako ploščico posebej).

$$\begin{aligned} j_S(1 - a_b)S + j_a S \epsilon &= S \sigma T_b^4 \epsilon + KS(T_b - T_z) \\ j_S(1 - a_c)S + j_a S \epsilon &= S \sigma T_c^4 \epsilon + KS(T_c - T_z) . \end{aligned}$$

Ker v obeh enačbah v vseh členih nastopa površina ploščice, lahko obe enačbi delimo z njo. Nato od enačbe za črno ploščico odštejemo enačbo za belo ploščico, od koder lahko izrazimo gostoto energijskega toka sončnega sevanja:

$$j_S = \frac{\sigma \epsilon (T_c^4 - T_b^4) + K (T_c - T_b)}{a_b - a_c} .$$

Ko vstavimo številke, dobimo rezultat $j_S = 426 \text{ W/m}^2$.

Ta rezultat zdaj uporabimo v eni od enačb za črno ali belo ploščico, da izrazimo še gostoto energijskega toka iz atmosfere. Primer z enačbo za belo ploščico:

$$j_a = \frac{\epsilon \sigma T_b^4 + K (T_b - T_z) - j_S (1 - a_b)}{\epsilon} .$$

Rezultat je $j_a = 368 \text{ W/m}^2$.

- Celotna gostota energijskega toka sončnega sevanja je vsota direktnega in difuznega dela: $j_S = j_{dif} + j_{dir}$. Ker sonce zakrijejo oblaki, direktni prispevek izgine, ostane nam le difuzni del. Prispevek atmosferskega sevanja se ne spremeni. Ker imamo podatek o novi temperaturi črne ploščice, lahko iz enačbe za črno ploščico izrazimo j_S , ki je v danem primeru enak j_{dif} :

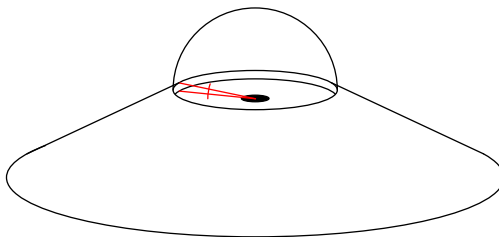
$$j_{dif} = \frac{\epsilon \sigma T_{c,nova}^4 + K (T_{c,nova} - T_z) - j_a \epsilon}{1 - a_c} .$$

Rezultat je $j_{dif} = 48.6 \text{ W/m}^2$

Opomba: Enaka naloga se rešuje pri predmetu Osnove meteorologije, ko se obravnava sevanje.

6.3.2 Naloga - Napaka piranometra zaradi slabo postavljenega senzorja

Imamo slabo narejen piranometer, ki ima senzor postavljen pregloboko, tako da je kot med ravnino senzorja in robom ščita 2° (glej skico na sliki 6.7). Kolikšno napako naredimo pri meritvi s takšnim piranometrom sredi dneva (ko je sonce dovolj visoko na nebu, da naša napaka ne vpliva na meritve direktnega prispevka)? Kako pa je z napako zjutraj in zvečer?



Slika 6.7: Skica defektnega piranometra za nalogo 6.3.2.

Zanima nas le napaka difuznega sevanja. Difuzno sevanje je izotropno (enako iz vseh smeri), zato je $dj/d\Omega$ konstantno (Ω označuje prostorski kot). Gostota energijskega toka difuznega sevanja je tako

$$j_{dif} = \int \frac{dj}{d\Omega} d\Omega = \int K d\Omega .$$

Gostota energijskega toka, ki bi jo izmerili s pravilno narejenim senzorjem, prihaja iz polprostora nad ploščico. Integriranje po prostorskem kotu je enako integriranju po enotski sferi, v našem primeru po zgornji polovici enotske sfere. Tako dobimo

$$j_{dif} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} K \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi K .$$

Torej je $K = j_{dif}/2\pi$.

Naš senzor pa vidi ϑ le med 0° in $\vartheta_{max} = 90^\circ - 2^\circ$. Integral ostane enak, le zgornja integralska meja po ϑ se spremeni. Z našim senzorjem tako izmerimo $j_{izm} = j_{dif} (1 - \sin 2^\circ)$. Naš senzor nameri le slabih 97% gostote energijskega toka difuznega sevanja.

Večjo težavo predstavljajo meritve zjutraj in zvečer, saj v nekem času (dokler se sonce ne dvigne dovolj visoko) direktnega prispevka sploh ne merimo. Takrat so napake lahko precej velike, saj kljub temu, da je sonce nizko in žarki na senzor vpadajo pod zelo majhnim kotom, direktno sevanje predstavlja pomemben delež sončnega sevanja.

Poglavje 7

Merjenje vidnosti

7.1 Uvod

Zanima nas, kako daleč še lahko vidimo. Vidnost merimo iz dveh razlogov:

- pove nam nekaj o optičnih lastnostih zračnih mas
- pomembna je za varnost prometa (posebej letalskega, tudi cestnega in pomorskega ter železniškega).

Že optičnih lastnosti atmosfere ni najlažje meriti, a pri vidnosti je dodatna težava, da je vezana na človeško zaznavanje, ki pa je zelo zapleteno.

Kaj vidnost torej je? Je največja razdalja, pri kateri črn objekt še lahko ločimo od ozadja (podnevi), oz. razdalja, pri kateri bi tak objekt še lahko videli in prepoznali, če bi se splošna osvetljenost povečala na normalno dnevno vrednost (to velja ponoči, ker takrat dnevna definicija očitno ne deluje). Stara definicija vidnosti ponoči: največja razdalja, pri kateri še lahko vidimo in identificiramo luči zmerne jakosti. Ta definicija ne velja več, ker so bile težave s tem, kaj je luč zmerne jakosti.

Vidnost je očitno zelo subjektivna količina. Njen objektivno merljivi ekvivalent je t.i. **“meteorological optical range (MOR)”**. Definiran je kot razdalja, na kateri se svetlobni tok vzporednega žarka iz žarnice, ki seva spekter črnega telesa s temperaturo 2700 K, oslabi na 5 % začetne vrednosti.

Ker se tu ne bomo spuščali v prevelike podrobnosti, bo za nas veljalo, da sta vidnost in MOR ekvivalentna pojma. Pomembno je poudariti, da se vidnost lahko močno spreminja, in da je lahko zelo različna v različnih smereh.

Natančnost meritev naj bi bila 20 % ali 20 m (odvisno od razdalj).

Vidnost določamo na dva načina:

- z opazovanji
- z meritvami

Pri **opazovanjih** imamo za vsako merilno mesto seznam *markerjev*. To so za določanje vidnosti primerni objekti na različnih znanih razdaljah. Opazovalec pogleda, katere od teh objektov še lahko vidi in na podlagi tega oceni vidnost. Markerji za Ljubljano (za razdalje od nekaj 100 m naprej) bi bili npr. Rožnik, Krim, Šmarna gora ipd. Čeprav je zaželeno, da so to dovolj veliki temni objekti pri tleh, to vedno ni možno. Ponoči se gleda luči z znanimi jakostmi na znanih razdaljah. Prednosti določanja vidnosti z opazovanji so:

- opazovalec zlahka razloči in upošteva različno vidnost v različnih smereh.

- tako določena vidnost dejansko opiše tisto, kar človek z “normalnim” vidom vidi (karkoli že pomeni normalno).

Obstaja pa tudi nekaj pomanjkljivosti:

- Meritev je zelo subjektivna, saj imamo ljudje različno občutljiv vid.
- Opazovanja pri večjih vidnostih v zaprtih dolinah so zelo otežkočena.
- Ponoči motijo luči v neposredni okolici, saj bi morala biti meritev izvedena v popolni temi in z opazovalcem popolnoma prilagojenim na nočni vid.
- Težko je dobiti podatke o jakosti luči, le-ta pa ni nujno stabilna.

Pri opazovanju si lahko pomagamo z videokamerami. Pogosto jih uporabljajo na letališčih in ob cestah, saj opazovalec lahko oceni vidnost na daljavo. To seveda ni optimalno.

Meritve vidnosti temeljijo na meritvah atenuacije (oslabitvenega faktorja) ali na meritvah sipanja.

Koschmiederjev zakon: navidezni kontrast objekta C_x pojema z razdaljo:

$$C_x = C_0 \exp(-\sigma x),$$

σ je oslabitveni koeficient, x pa razdalja. Minimalno razmerje C_x/C_0 , ki ga človek z normalnim vidom še lahko razloči, se imenuje *kontrast praga*. Njegova vrednost je v povprečju $C_x/C_0 = \epsilon_t = 0.05$. Ta vrednost je bila določena eksperimentalno. Pri tej vrednosti, razdalja x podaja MOR. Torej:

$$MOR = \frac{\ln \epsilon_t}{\sigma} \approx \frac{3}{\sigma}.$$

Naprave za merjenje vidnosti z merjenjem **oslabitvenega faktorja**:

- a) **Transmisiometer** meri oslabitev žarka v določenem volumnu zraka. To je najzaneslivejši merilec vidnosti, ker deluje praktično po definiciji MOR. Sestavljen je iz dveh delov, oddajnika (luči) in sprejemnika (senzorja). Luč ima znane lastnosti, merimo koliko svetlobe od luči pride do senzorja. Luč deluje v pulzih, da ločimo prispevek luči od prispevka svetlobe iz okolice. V osnovi ločimo dva tipa (slika 7.1):

- luč in senzor sta vsak na svojem koncu merjene poti
- luč in senzor sta v isti škatli, na drugi strani poti je zrcalo.

Razdalja, na kateri merimo, se imenuje *bazna razdalja*. Tipične bazne razdalje so med nekaj metrov do 150 m, lahko tudi do 300 m.

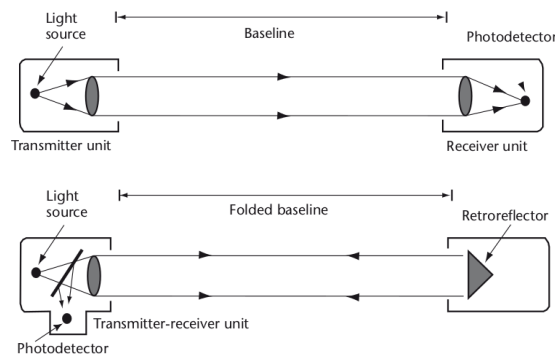
Transmisiometer deluje na podlagi Koschmiederjevega zakona, ki se za transmisiometer zapiše kot

$$\tau = \exp(-\sigma B),$$

kjer je B bazna razdalja, τ pa transmisivnost (prepustnost) na razdalji B .

Težava pri merjenju s transmisiometrom je *reprezentativnost meritev*. Merimo le v eni smeri, na fiksni kratki razdalji, vidnost pa lahko lokalno zelo variira.

- b) **Lidar** Z njim merimo sipanje laserskega žarka nazaj proti oddajniku. Več o tem kasneje. Lidarske meritve za vidnosti nad 2000 m ne delujejo več dobro.
- c) **Telefotometrični instrumenti** primerjajo svetlost oddaljenih predmetov z nebom za njimi. Takšni merilniki se praktično ne uporabljajo, saj to delo zelo dobro opravljajo opazovalci.



Slika 7.1: Zgoraj: transmissiometer, ki ima svetilo in senzor na nasprotnih straneh merjene poti, spodaj: transmissiometer, ki ima svetilo in senzor v isti škatli (Vir: WMO CIMO guide).

- d) Ročni merilci oslabitve so zelo enostavni inštrumenti. Gre za merilec, ki vsebuje filter s spreminjajočo se prepustnostjo vidne svetlobe. Po korakih zmanjšujemo prepustnost, dokler skozi še vidimo luč. Taki merilci niso ravno natančni in se ne uporabljajo dosti.

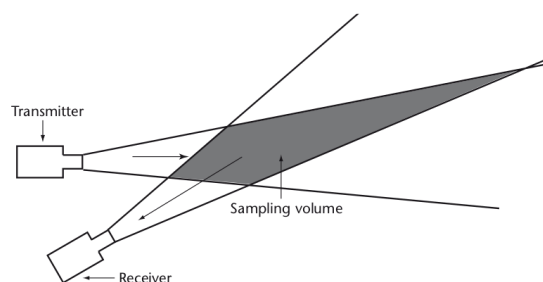
Drugi tip inštrumentov so naprave za merjenje vidnosti preko **sipanja** v atmosferi. V atmosferi pride do oslabitve žarka iz dveh razlogov: zaradi sipanja in absorpcije. V splošnem je absorpcija zanemarljiva, koeficient oslabitve pa približno enak koeficientu sipanja. Težava je na območjih z onesnaženim zrakom, kjer polutanti lahko absorbirajo dovolj, da to ni več zanemarljivo. Inštrumenti, ki delujejo na podlagi sipanja:

- a) **Merilec vidnosti na podlagi sipanja nazaj.** Imamo usmerjen žarek svetlobe, poleg oddajnika (fizično zraven) pa imamo sprejemnik, ki meri koliko tega žarka se sipa nazaj (slika 7.2). Težava takšnega merilca je, da koeficient sipanja nazaj in vidnost nista dovolj dobro korelirana.
- b) **Merilec vidnosti na podlagi sipanja naprej.** Obstajata dve izvedbi, prikazani na sliki 7.3. Optimalni kot med oddajnikom in sprejemnikom je 20 do 50°. Tak merilec je slabši od merilca na podlagi sipanja nazaj. Takšne meritve so tudi zelo lokalne, kar ni dobro za letališča.
- c) **Merilec vidnosti na podlagi sipanja preko širokega kota.** Skica je na sliki 7.4. Sprejemnik je usmerjen v črno votlino (znano sevanje, izven vidnega dela). Luč, pravokotna na usmerjenost sprejemnika, sveti v širokem kotu. Merimo sipanje svetlobe te luči. To se bolj kot za meritev vidnosti uporablja za merjenje koncentracije polutantov v zraku.

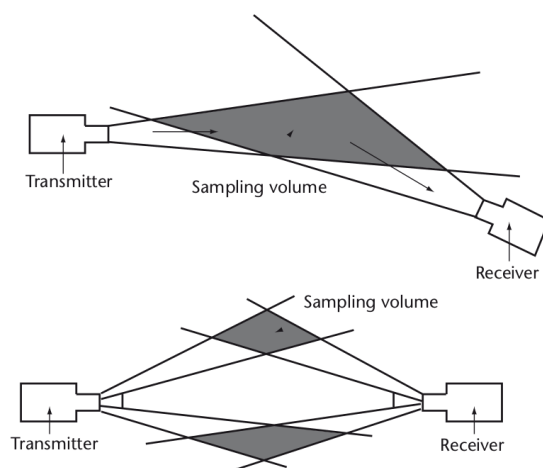
Prednosti takšnih inštrumentov je, da potrebujejo malo prostora (1 do 2 m), težava pa je, da so meritve zelo lokalne. Večinoma se jih uporablja tam, kjer je malo prostora in ni možnosti dobrih opazovanj (npr. na ladjah), in tam, kjer natančnost ni zelo pomembna (npr. za določanje prisotnosti megle na avtocestah).

Za vse merilnike vidnosti je pomembno, da **sonce ne sveti direktno v sprejemnik**. Ostale težave pri inštrumentalnem merjenju vidnosti:

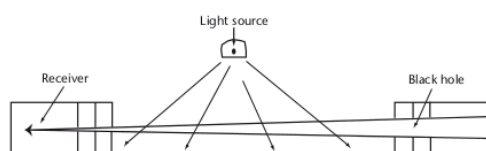
- *Optični deli morajo biti čisti.*
- *Spreminjajoč izsev luči.* To je potrebno kontrolirati in po potrebi luči zamenjati.
- *Padavine in veter.* Na optičnih delih se nabirata umazanija in voda. Meritve se lahko zelo spreminjajo, zaradi lokalnih variacij v količini kapljic.



Slika 7.2: Skica merilca vidnosti na podlagi sipanja nazaj (Vir: WMO CIMO guide).



Slika 7.3: Skici obeh izvedb merilcev vidnosti na podlagi sipanja naprej (Vir: WMO CIMO guide).



Slika 7.4: Skica merilca vidnosti na podlagi sipanja preko širokega kota (Vir: WMO CIMO guide).

- *Prah v suhih območjih.* Veter ga lahko dviguje in povzroča enake efekte kot pri padavinah. Lahko pride do absorpcije svetlobe na prašnih delcih.
- *Pregretost zraka* zaradi katere pride do dodatnega sipanja na fluktuacijah gostote zraka.
- *Reprezentativnost meritev.* Večinoma merimo na kratkih razdaljah v fiksni smeri, vprašanje pa je, kaj se dogaja v okolici.

7.2 Vidnost na letališčih

Poznavanje vidnosti na letališčih je zelo pomembno, ker morajo piloti za pristanek videti pristajalno stezo (vsaj v zadnjem delu pristanka). Vidnost se zato določa vzdolž vzletnih in pristajalnih stez. Obstajata dve količini, ki se jih meri. Ena je zelo podobna meteorološki vidnosti, mi pa se bomo posvetili drugi - **“Runway visual range (RVR)”**.

RVR je razdalja, do katere pilot nad sredinsko črto vzletne ali pristajalne steze še lahko vidi oznake na stezi ali luči na stezi (ali ob njenem robu). Višina pilota je privzeta na 5 m, RVR pa je ocena kaj vidi. Zato je bolj pomembna, kadar je kratka (do 1500 m), kadar je daljša pa je manj pomembno kolikšna je. Podaja se le do 10 km, kar je več, se poda kot 10 km (o tem bomo še govorili, ko pridemo do depeš). RVR se vedno podaja vzdolž stez, saj je ta podatek za pilota daleč najpomembnejši.

RVR se določa iz:

- meritev vidnosti (MOR),
- meritev svetlosti ozadja,
- lastnosti in postavitve označevalnih luči ob stezi.

RVR se lahko določa z opazovanji, na podlagi opazovanja objektov. V tem primeru določamo svetlost objektov glede na ozadje. Merjenje RVR se večinoma izvaja z meritvami MOR s transmisiometrom, z nekaj dodatnimi komplikacijami.

RVR na osnovi označevalnih luči se določa s pomočjo **Allardove formule**:

$$E = \frac{I \exp(-\sigma x)}{x^2},$$

kjer je E osvetljenost (približno isto kot gostota toka na dano površino) in I svetilnost (moč, izsevana v dani smeri). x je enak RVR, ko je $E = E_t$, vidnemu pragu osvetljenosti (ko komaj še vidimo). Takrat je:

$$E_t = \frac{I \exp(-\sigma RVR)}{RVR^2}.$$

Eksponent lahko določimo iz meritev s transmisiometrom. Dobimo:

$$E_t = \frac{I \tau^{RVR/B}}{RVR^2}.$$

Pri takšnih meritvah moramo upoštevati:

- E_t je odvisen od svetlosti ozadja,
- svetilnost luči je odvisna od njihovih nastavitev,
- kako pilot vidi luči na (in ob) stezi je odvisno od lege pilota glede na luči (smeri iz katere jih gleda in oddaljenosti od luči) ter od lastnosti luči (prostorske porazdelitve gostote toka).

7.3 Naloge

7.3.1 Naloga - Meritev s transmisiometrom

S transmisiometrom z bazno razdaljo 75 m izmerimo transmisivnost 0.2. Kolikšna je vidnost?

Vidnost je določena iz Koschmiederjevega zakona kot $\ln \epsilon_t = -\sigma MOR$. Ker v tej enačbi ne poznamo σ , ne moremo izračunati MOR. Imamo pa še enačbo transmisiometra: $\tau = \exp(-\sigma B)$, od koder lahko izrazimo σ . Vstavimo jo v zgornjo enačbo in izrazimo MOR:

$$MOR = B \frac{\ln \epsilon_t}{\ln \tau} = 75 \text{ m} \frac{\ln 0.05}{\ln 0.2} \approx 140 \text{ m} .$$

7.3.2 Naloga - Vidnost podnevi in ponoči

Podnevi in ponoči je enako gosta megla. Na meteorološki postaji opazujemo, kako daleč vidimo cestne luči, ki svetijo podnevi in ponoči. Ali je vidnost podnevi enaka kot ponoči?

Fizikalno je kontrast definiran kot razlika svetlosti objekta (luči) in ozadja, normirana s svetlostjo ozadja. (V resnici je absolutna vrednost tega.) Ker je ponoči razlika med svetlostjo luči in ozadja večja, je kontrast ponoči večji kot podnevi.

Če pogledamo definicijo praga:

$$\epsilon_t = \frac{C_x}{C_{dan}} = \exp(-\sigma MOR_d) = \frac{C_x}{C_{noc}} = \exp(-\sigma MOR_n) .$$

Od tod sledi, da je vidnost ponoči večja od vidnosti podnevi. To nekako vemo tudi iz lastnih izkušenj.

Opomba: Bolj natančno se o tem govori pri predavanjih!

7.3.3 Naloga - Vidnost luči

Kako daleč se vidi izotropno sevajoča luč, če je $P = 30 \text{ W}$? Poznamo $\sigma = 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, velja Beerov zakon (delež absorbirane in sipane svetlobe je eksponentna funkcija σx). Zaznavni prag očesa je $j_{min} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Luč seva s konstantno močjo, gostota toka pa upada s kvadratom razdalje. Brez atmosfere bi veljalo:

$$j = \frac{P}{4\pi r^2} .$$

V atmosferi pa moramo upoštevati še oslabitev zaradi absorpcije in sipanja v atmosferi: $j = j_0 \exp(-\sigma r)$. Minimalna gostota toka, ki jo še zaznamo, je tako:

$$j_{min} = \frac{P}{4\pi r^2} \exp(-\sigma r) .$$

Od tod dobimo implicitno enačbo za razdaljo:

$$r = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{P}{j_{min} 4\pi r^2} .$$

Numerično reševanje nam da $r \approx 64 \text{ km}$. V vesolju bi bila ta razdalja še bistveno večja: $r \approx 1500 \text{ km}$.

Poglavje 8

Meteorološka opazovanja

8.1 Oblaki

Glavna literatura: Atlas oblakov WMO (WMO International Cloud Atlas, obstaja tudi slovenski prevod).

Oblake *opazujemo*. Glede na osnovne značilnosti jih delimo na:

- **rodove** - obstaja 10 rodov, ki oblake delijo glede na splošne značilnosti
- **vrste** - delitev glede na obliko in notranjo sestavo
- **podvrste** - določajo posamezne posebne lastnosti oblaka. Pri istem oblaku lahko imamo več podvrst.

Obstajajo še **dopolnilne oblike**, **spremljajoče oblake** in **prvotne oblake**. Slednji so oblaki, iz katerih so se kasneje razvili novi oblaki iz drugega roda. Takšne oblake večinoma opazimo redko in niso direktno vključeni v zgornjo klasifikacijo.

Kaj določamo oblakom?

- **višino** - višina baze ali vrha oblaka je navpična razdalja med tlemi in spodnjo oziroma zgornjo mejo oblaka. Višino baze oblaka lahko tudi merimo z ustreznimi inštrumenti. To se počne predvsem na letališčih.
- **nadmorsko višino** - navpična razdalja med morsko gladino (oz. nadmorsko višino 0 m) in bazo ali vrhom oblaka.
- **navpično razsežnost** - navpična razdalja med bazo in vrhom oblaka.

Poleg tega podajamo tudi **pokritost neba** z oblaki. Podaja se v deležih, ponavadi v osminah, na klimatoloških postajah pa v desetinah (to ste spoznali pri meteorološkem praktikumu).

Oblaki se pojavljajo na različnih višinah, skoraj izključno **v troposferi**. Za potrebe opazovanja oblakov jo razdelimo v tri plasti, glej tabelo 8.1. V zgornji plasti se najpogosteje pojavljajo *visoki oblaki*: Cirrusi, Cirrocumulusi, Cirrostratusi. V srednji plasti se najpogosteje pojavljajo *srednji oblaki*: Altocumulusi, Altostratusi, Nimbostratusi. Altostratusi pogosto segajo tudi v zgornjo plast, Nimbostratusi pa tako v zgornjo kot v spodnjo plast. V spodnji plasti imamo *nizke oblake*: Stratuse in Stratocumuluse. Preostala dva rodova, Cumulus in Cumulonimbus, imata ponavadi bazo v spodnji plasti, vrhovi pa lahko dosežejo srednjo ali zgornjo plast (lahko segajo celo malo v stratosfero).

Sledi pregled rodov, vrst in podvrst po Atlasu oblakov (tega ne bom prepisovala tu, ker obstaja slovenski prevod knjige, kjer je vse zbrano na enem mestu).

Tabela 8.1: Višina oblačnih plasti.

	polarni predeli	zmerni predeli	tropski predeli
zgornja plast	3 - 8 km	5 - 13 km	6 - 18 km
srednja plast	2 - 4 km	2 - 7 km	2 - 8 km
spodnja plast	0 - 2 km	0 - 2 km	0 - 2 km

8.2 Meteorološke depeše

Glavna literatura: WMO Manual on Codes, Vol I.1, Part A - Alphanumeric codes.

Ogledali si bomo tri formate, dva letalska in sinoptičnega:

- **METAR** (FM 15) - poročilo o vremenu na letališču
- **TAF** (FM 51) - letališka napoved
- **SYNOP** (FM 12) - poročilo s sinoptične meteorološke postaje

Meteorološke depeše potrebujemo za hitro in učinkovito izmenjavo meteoroloških podatkov (meritev, napovedi, opozoril, ipd.). Ker so standardizirane, nam omogočajo tudi jasno in nedvoumno mednarodno komunikacijo. S tem se rešimo zmede z jeziki, merskimi enotami, časovnimi pasovi in še čim.

Klasični formati meteoroloških depeš že po svoji obliki nakazujejo, da so pravzaprav relikviji iz nekega drugega časa. Standardi so bili postavljeni še v času uporabe teleprinterjev, ko je bil prenos podatkov (po današnjih standardih) še neskončno počasen. Zato so vsi formati sestavljeni tako, da vsebujejo le potrebne podatke z željeno natančnostjo, in ravno dovolj ostalih podatkov, da vemo kaj podane številke (ali črke) pomenijo.

Danes takšna ekstremna kratkost sporočil ni več potrebna, zato se razvijajo tudi novi standardi za izmenjavo večjih količin podatkov. Dva primera pomembnejših sta *BUFR* in *GRIB*. Oba formata sta binarna, namenjena zapisu in branju z računalniki. Prvi je splošen, za izmenjavo različnih meteoroloških podatkov (*BUFR* = Binary Universal Form for the Representation of meteorological data), drugi pa je namenjen izmenjavi podatkov na (geografski) mreži (*GRIB* = Gridded Binary Data) in vsebuje tudi napotke ustreznemu programu za risanje kart, kako podatke narisati.

Poglavje 9

Merjenje višine snežne odeje

9.1 Uvod

Merimo tri stvari:

- **višino snežne odeje** - to je skupna količina snega, akumuliranega na nekem mestu.
- **višino novozapadlega snega** - to je količina snega, akumuliranega v časovni periodi do enega dneva.
- **vodnost snega** - to je masa vode, ki jo vsebuje znana prostornina snega. Torej gostota snega.

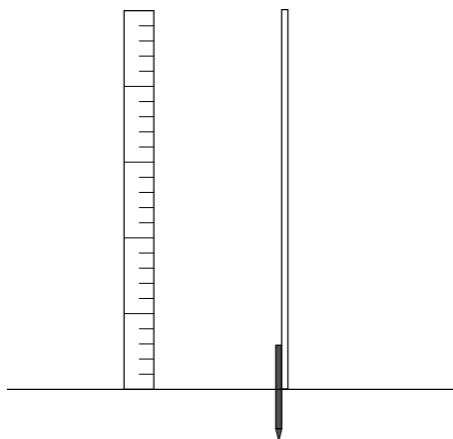
Snežna odeja se meri na odprtem prostoru, površine vsaj $10 \times 10 \text{ m}^2$. Prostor mora biti brez ovir, ki bi motile naravno naletavanje snega. Območje tudi ne sme biti preveč vetrovno, da veter ne raznaša snega naokrog. Višini snežne odeje in novozapadlega snega se meri na centimeter natančno.

Višino snežne odeje in višino novozapadlega snega merimo s **snegomeri**.

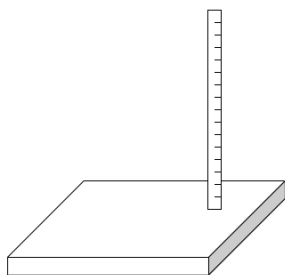
- a) Snegomer za merjenje *višine snežne odeje* je sestavljen iz 2,5 m visoke bele merilne palice, ki ima označeno centimetrsko skalo in je z železnim klinom pritrjena v tla (slika 9.1). Pri meritvi s skale odčitamo, do kod seže sneg. Težave takšnega merjenja so:

- *teptanje snega zaradi hoje naokrog* - zato merimo od daleč in ne hodimo v bližino snegomera.
- *prenašanje snega z vetrom* - veter lahko odnaša ali prinaša sneg na naše merilno mesto. Zato je priporočljivo, da sneg merimo na večjih mestih okrog postaje in meritve nato povprečimo.
- *taljenje snega ob merilni palici* - palica se, kljub beli barvi, segreva in tali sneg v neposredni bližini. Tudi zato je pomembno, da merimo z razdalje, saj tako zmanjšamo napako.
- *nagnjenost pobočja* - tla morajo biti ravna, da višino snežne odeje merimo pravokotno na plast in ne pod kotom.

- b) Snegomer za merjenje *višine novozapadlega snega* je prenosen. Sestavljen je iz bele hrapave lesene deščice in ravnila (slika 9.2). Pred predvidenim sneženjem postavimo deščico na predvideno mesto (željene lastnosti prostora so enake kot pri merjenju celotne višine). Nato ob predvidenih terminih preko dneva z ravnilom merimo višino snega na deščici.



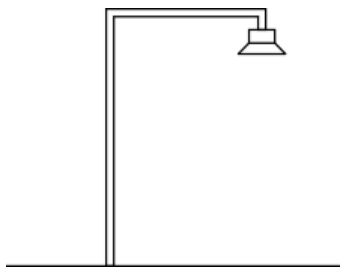
Slika 9.1: Skica snegomera za merjenje višine snežne odeje. Levo: pogled od spredaj (to je zgolj skica, zato centimetrške oznake niso narisane), desno: pogled od strani.



Slika 9.2: Merjenje višine novozapadlega snega: pomembno je, da ravnilo, ko ga zapičimo v sneg, zapičimo vse do deščice.

Praviloma se meri enkrat dnevno (6.00 UTC). V kolikor se meri večkrat, se meritve ne seštevajo, temveč se vedno poda dejanska akumulacija od začetka intervala (zaradi posedanja snega). Če merimo ob 6.00 UTC in 18.00 UTC, se ob 18.00 UTC meri akumulacija med 6.00 UTC in 18.00 UTC istega dne (12 ur), ob 6.00 UTC pa akumulacija od 6.00 UTC prejšnjega dne (24 ur). Deščica se tako čisti le enkrat dnevno, praviloma ob 6.00 UTC. Takrat se z nje odstrani ves sneg in se jo postavi na vrh snežne odeje. Tako višino novozapadlega snega v novem časovnem intervalu ponovno začnemo meriti z 0 cm. Ker moramo deščico vsakič prestaviti, za meritve pa moramo hoditi v njeno bližino, se meritve novozapadlega snega ne izvajajo na istem mestu kot meritve celotne višine snega, temveč nekaj metrov proč.

Višino snežne odeje lahko merimo tudi z **ultrazvočnimi merilniki**. Sestavljeni so iz ultrazvočnega oddajnika in sprejemnika, pritrjenima na drogu, obrnjenima navzdol (slika 9.3). Oddajnik oddaja signal, ki se nato odbije od vrha snega, sprejemnik pa ta signal zazna. Iz časa, ki ga signal porabi za pot, se izračuna oddaljenost vrha snežne odeje od senzorja. Od tod lahko določimo višino snežne odeje. Težavi takšnega merilnika sta, da zanj potrebujemo električno napajanje in da z njim lahko merimo višino le do višine senzorja.



Slika 9.3: Ultrazvočno merilnik višine snežne odeje.

Vodnost snega merimo tako, da vzamemo vzorec snega znane prostornine, ga stalimo in določimo maso staljene vode. Vzorec lahko vzamemo le iz posameznih plasti (horizontalno), ali pa v preseku preko večih plasti (vertikalno). To praviloma naredimo tako, da s posebnim merilnim valjem znane prostornine zavrtamo v sneg in ven potegnemo vzorec. Tudi taljenje lahko nato poteka na dva načina. Lahko vzorec odnesemo na sobno temperaturo in počakamo, da se sneg stali (lahko tudi grejemo) ter nato stehamo maso vode. V tem primeru mora biti posoda med taljenjem snega pokrita, da voda ne izhlapeva iz posode. Druga možnost je, da vzorec prelijemo z znano količino vroče vode in nato iz natehtane mase njeno maso odštejemo.

9.2 Naloge

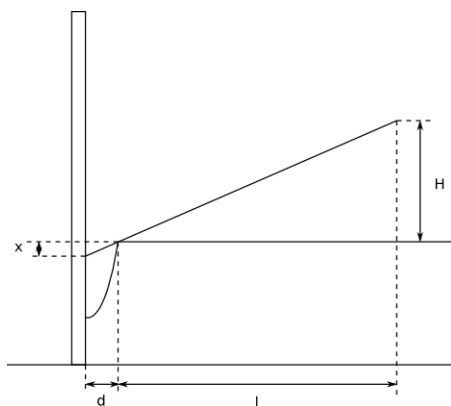
9.2.1 Naloga - napaka pri merjenju z merilno palico

Z merilno palico merimo višino snežne odeje. Višina je v resnici 20 cm. Merimo stoje, za višino oči privzamemo 170 cm. Kolikšno napako naredimo pri merjenju z 1, 2, 3, 4, 5, 10 m, če je med merilno palico in snegom 2 cm luknje, nastale s talitvijo snega ob palici.

Na sliki 9.4 imamo skico geometrije naloge. Razmerje med napako x in širino luknje $d = 2$ cm je enako razmerju med višino oči $H = 170$ cm in oddaljenostjo od roba luknje l . Torej:

$$x = \frac{d}{l} H.$$

Tabela 9.1 nam podaja rezultate. Za manjše napake seveda merimo s čim večje razdalje in čepe.



Slika 9.4: Skica za nalogo 9.2.1.

Tabela 9.1: Rešitev naloge 9.2.1.

oddaljenost od palice	l	x	x/h
1 m	98 cm	3,47 cm	17,3 %
2 m	198 cm	1,72 cm	8,6 %
3 m	298 cm	1,14 cm	5,7 %
4 m	398 cm	0,85 cm	4,3 %
5 m	498 cm	0,72 cm	3,6 %
10 m	998 cm	0,34 cm	1,7 %

9.2.2 Naloga - napaka pri merjenju z ultrazvočnim merilnikom zaradi spreminjanja temperature in vlage

Na postaji imamo postavljen ultrazvočni merilec višine snežne odeje. Senzor je nameščen 1 m nad tlemi (razdalja od golih tal do senzorja - maksimalna višina, ki jo lahko še merimo). Zjutraj ob temperaturi -5°C izmerimo višino 25 cm, kar se ujema z meritvijo s snegomerom. Predpostavi, da se sneg čez dan nič ne posede. Hitrost zvoka v suhem

zraku opišemo z enačbo

$$c(T) = 331.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{T}{273 \text{ K}}}.$$

- a) Predpostavimo, da je zrak suh. Kolikšno višino snežne odeje izmerimo opoldne, ko je temperatura 2°C ?
- b) Kaj pa če zrak ni suh? Jutranja vlažnost je 90 %, opoldanska pa 60 %. Temperature so enake kot pri prejšnji točki, za tlak privzemi 1000 hPa.

- a) Merimo čas, ki ga signal potrebuje za pot od senzorja do vrha snega in nazaj. Torej za dvakratnik razdalje med senzorjem in vrhom snežne odeje: $s = 2 \cdot (H - h)$, kjer je H razdalja med senzorjem in tlemi (1 m), h pa višina snežne odeje (25 cm). Dobimo $s = 150 \text{ cm}$. Za to pot signal potrebuje $t = s/c(T = -5^\circ\text{C})$ časa, kjer je $c(T = -5^\circ\text{C})$ hitrost zvoka pri jutranji temperaturi (glej enačbo v navodilih). Ko vstavimo številke, dobimo $t = 4.57 \text{ ms}$.

Opoldan to isto razdaljo merimo pri drugačni temperaturi, zaradi česar se spremeni hitrost potovanja signala in posledično čas potovanja signala. Zdaj signal za to isto pot porabi $t' = s/c(T = 2^\circ\text{C}) = 4.51 \text{ ms}$. Ker pa je merilec očitno nastavljen tako, da pravilno meri pri -5°C , senzor zdaj izmeri, da je signal prepotoval razdaljo $s' = t' \cdot c(T = -5^\circ\text{C}) = 1.48 \text{ m}$. Za višino snežne odeje tako izmeri $h' = H - s'/2 = 26 \text{ cm}$.

- b) V tem primeru je dogajanje zelo podobno, le da moramo upoštevati še vlago. To storimo tako, da namesto s "pravo" temperaturo, računamo z virtualno temperaturo:

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{e}{p} \left(1 - \frac{R_d}{R_v}\right)}.$$

Parni tlak e izračunamo iz relativne vlage: $e = RH \cdot e_s$ s pomočjo Clausius-Clapeyronove enačbe (za izračun nasičenega parnega tlaka e_s). Jutranja virtualna temperatura je tako $T_v = 268.4 \text{ K} = -4.6^\circ\text{C}$, opoldanska pa $T'_v = 275.4 \text{ K} = 2.4^\circ\text{C}$.

Postopek računanja je nato identičen kot pri suhem zraku, le da temperaturo zamenjamo z ustrezno virtualno temperaturo. Razlika v končnem rezultatu je zanemarljiva.

Opomba: Kljub temu, da na hitrost zvoka vplivata tako temperatura kot vlažnost, je vpliv vlage praktično zanemarljiv. Dovolj je, da se upošteva zgolj popravek zaradi temperature, kar pa sodobni senzorji že samodejno počnejo.

Zanima nas, kako natančno moramo poznati temperaturo, da dosežemo 1 cm natančnost ultrazvočnega merilca višine snega? Predpostavimo, da tlak pri tleh natančno poznamo.

Hitrost zvoka v vlažnem zraku opiše enačba

$$c(T) = c_0 \sqrt{\frac{T_v}{T_0}},$$

kjer je $c_0 = 331.3$ m/s, $T_0 = 273$ K, T_v pa virtualna temperatura, ki jo lahko izrazimo z

$$T_v = \frac{T}{1 - \frac{e}{p}(1 - \epsilon)} ,$$

kjer $\epsilon = R_d/R_v$.

Pot ki jo opravi zvok med ultrazvočnim merilcem in vrhom snežne odeje v času Δt je $s = c\Delta t/2$. Naloga sprašuje po občutljivosti ds/dT oziroma dc/dT .

Tlak vodne pare določa Clausius-Clapeyronova enačba. Po upoštevanju vseh komponent sledi odvisnost za občutljivost

$$\frac{dc}{dT} = \frac{1}{2}cT^{-1} \left[1 + \frac{T_v}{T^2} \frac{e}{p} (1 - \epsilon) \frac{h_i}{R_v} \right]$$

Za podatke iz naloge pri $T = 280$ K in $p = 1000$ hPa sledi, $dc/dT = 10$ m/s/K. Potrebno natančnost merjenja temperature ΔT za dosego centimetske natančnosti pri merjenju debeline snežne plasti izračunamo iz relacije $ds/dT = dc/dT \Delta t/2$. Za primer iz naloge $\Delta t = 0.0045$ s, je potrebna natančnost izmerjene temperature $\Delta T = 0.5$ K. Tipični merilci temperature pogoj torej zlahka izpolnjujejo.

Poglavje 10

Napredni meteorološki instrumenti

10.1 Radiosondažni balon

Meteorološki baloni imajo pri opazovanju atmosfere še danes izjemno pomembno vlogo, pred daljinskimi meritvami s sateliti pa so bili edini vir informacij o meteoroloških količinah v zgornji troposferi. Meteorološki baloni torej merijo navpični profil osnovnih količin, kot so temperatura, veter, vlaga itd. Z novodobnimi baloni lahko merimo vse do višine 40 km. Stratosferski baloni lahko v ozračju ostanejo celo več mesecev. Poleg tega so sposobni nositi precej težal tovor (~ 1000 kg). To med drugim omogoča pritrjevanje večjih merilnikov (radar, lidar) direktno pod balon, s čimer precej natančno premerimo atmosfero pod balonom.

Sledi vrsta nalog povezanih z nekaterimi lastnostmi meteoroloških balonov. Nekatere uporabljene predpostavke niso povsem realistične, ampak so dovolj dobre za hitre ocene. Predstavljene bodo tudi bolj realistične predpostavke, tem pa analitične rešitve niso dodane. Bralec je v takšnih primerih vabljen nalogo rešiti numerično.

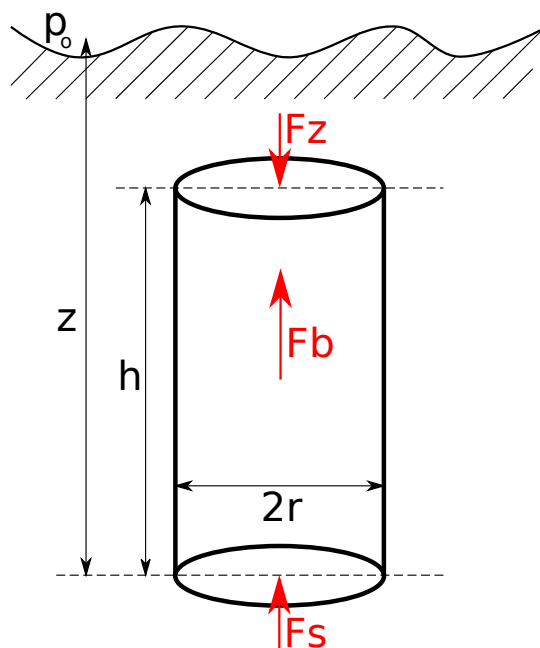
10.1.1 Vzgon

Radiosondažni balon se v atmosferi dviguje zaradi vzgona. Pritisk v ozračju z višino pada. Dokaži na primeru sferičnega telesa, da velja naslednja trditev: sila vzgona je enaka teži izpodrinjene tekočine oziroma $F_B = \rho V g$, kjer ρ predstavlja gostoto tekočine, V volumen telesa in g težnostni pospešek.

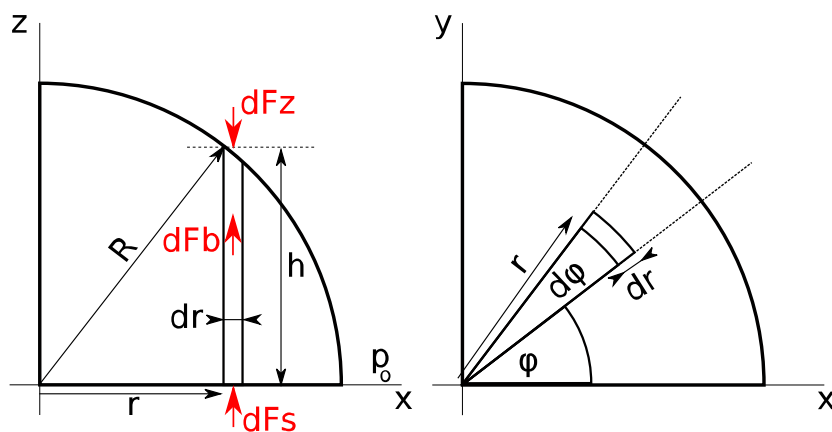
Izpeljava enačbe vzgona je najbolj enostavna za primer tankega valja ki je postavljen vertikalno kot prikazuje slika 10.1. Okolica lahko predstavlja tekočino ali plin, kjer tlak pada z višino. Sile tekočine, ki delujejo na stransko ploskev se v stabilnem okolju odštejejo. Vzgon tako predstavlja razlika med silama F_s in F_z , kjer je zaradi stratifikacije $F_s > F_z$. Silo na ploskev povzroča tlak tekočine (plina) $p = F/S$. Upoštevamo še hidrostatični približek in napišemo lahko:

$$\begin{aligned} F_B &= F_s - F_z \\ &= (p_0 - \rho g z)S - (p_0 + \rho g(z - h))S \\ &= \rho g h \pi r^2 \\ &= \rho g V \end{aligned}$$

V primeru bolj kompleksnega telesa je potrebno sešteti prispevke sil posameznih ploskev. Za primer si pogledjmo sferično telo radija R kot prikazuje slika 10.2. Celotno sfero



Slika 10.1: Delovanje okolice na valj v stratificirani tekočini/plinu. Rezultanta sil F_b , ki prejmlje v težišču telesa, predstavlja vzgon na telo.



Slika 10.2: Sila vzgona majhnega koščka sferično oblikovanega telesa z radijem R .

razdelimo na majhne dele površine $dr r d\phi$ in višine $h^2 = R^2 - r^2$. Opazimo simetrijo med zgornjo in spodnjo polovico sfere, zato račun nadaljujemo le za zgornjo polovico. Prispevek k skupnemu vzgonu napišemo v obliki diferenciala

$$\begin{aligned}
 dF_B &= dF_s - dF_z \\
 &= p_0 dS - (p_0 - \rho g h) dS \\
 &= \rho g \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\phi
 \end{aligned}$$

intergriramo v mejah $r \in [0, R)$ in $\phi \in [0, 2\pi)$ in dobimo

$$F_B = \rho g \frac{2\pi R^3}{3}$$

To velja le za zgornjo polovico sfere. Podobno velja tudi za spodnjo polovico kar se sešteje v znano rešitev $F_B = \rho g V$.

10.1.2 Klasični radiosondažni balon

Imamo sistem balona (sferične oblike, zaprt) in dodatne uteži.

- a) Zapiši ravnovesje sil za balon v primeru ko se balon nepospešno dviguje v atmosferi.
- b) Zapiši enačbo za hitrost balona v laminarnem in turbulentnem režimu toka. V katerem primeru doseže balon višjo hitrost?
- c) Na kateri višini se ustavi balon (če se ustavi) v linearnem/kvadratnem režimu za
 - c.1) Radij balona je z višino konstanten. Gostota zraka z višino pada $\rho = \rho_0 \exp(-\gamma z)$. Masa plina v balonu se ohranja.
 - c.2) Gostota zraka z višino pada $\rho = \rho_0 \exp(-\gamma z)$. Masa plina v balonu se ohranja. Razmerje gostote plina v balonu in gostote zraka je konstantno z višino. Radij balona je torej funkcija višine. Je pravzaprav smiselno pričakovati, da se balon pri teh predpostavkah lahko ustavi?
- d) V kolikšnem času balon doseže višino $H=10$ km v linearnem režimu pri predpostavkah c.1) in c.2)? Ali je balon, ki ohranja volumen hitrejši od tistega kjer se volumen z višino povečuje? Če je, za koliko?
- e) Dodatno (lahko si pomagaš numerično): predpostavi, da opna balona ustvarja površinsko napetost, ki je uravnovešena z razliko tlakov (v balonu in okolici). Predpostavi še da se masa plina v balonu ohranja in da velja hidrostatično ravnovesje, kjer se temperatura linearno zmanjšuje z višino (klasična troposfera). Poskusi za ta primer napisati enačbe/rešitve v b), c) in d). Lahko poskusiš tudi numerično. Za ta primer oceni površinsko napetost tipičnega balona, ki počni na višini 20 km in ima tik pred tem volumen 500 m^3
- f) Oceni kakšno napako naredimo pri predpostavki o nepospešnem gibanju balona.

Balon je preproste sferične oblike z radijem r , ki vsebuje plin z gostoto ρ_B . Nanj je pritrjena masa M . Balon se giblje nepospešno v vertikalni smeri. Približek nepospešnosti je dober predvsem višje v atmosferi, saj je gibanje balona tam vedno bolj enakomerno. Sila upora, ki balon zavira je funkcija toka (laminarni oziroma turbulentni tok). Celotno ravnovesje popisuje naslednja enačba

$$F_B = F_{B_g} + Mg + F_u$$

$$\rho g V_B = \rho_B g V_B + Mg + F_u ,$$

kjer F_B predstavlja silo zaradi vгона in F_{B_g} silo teže balona. Silo upora F_u določa enačba

$$F_u = \frac{1}{2} C_D \rho S w^2 ,$$

kjer $S = \pi r^2$, w predstavlja vertikalno hitrost in C_D parameter, ki je funkcija Raynold-sevega števila. V linearnem režimu $C_D = C_0/Re$ v turbulentnem pa velja, da je C_D konstanten (C_0). Pri čemer Raynoldsovo število definiramo kot razmerje $Re = \rho w(2\pi r)/\mu$, kjer μ predstavlja koeficient dinamične viskoznosti.

Za linearni režim enačbo prepišemo v obliko

$$w = A(\rho - \rho_B)r^2 - \frac{B}{r},$$

kjer $A = 16g/3/C_0/\mu$ in $B = 4Mg/\pi/C_0/\mu$.

V primeru kvadratnega režima se enačba spremeni v obliko

$$w^2 = A'r(1 - \frac{\rho_B}{\rho}) - B'\frac{1}{\rho r^2}$$

kjer $A' = 8g/3/C_0$ in $B = 2Mg/\pi/C_0$.

Gostota zraka se z višino spreminja eksponentno po naslednji enačbi

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\gamma h}$$

Tipičen nabor parametrov, ki ga lahko uporabimo v nalogi je sledeč.

parameter	vrednost	enote
g	9.81	m/s
r_0 (radij balona pri tleh)	60	cm
$C_0\mu$	8.225	Ns/m^2
M	1.5	kg
ρ_0 (gostota zraka pri tleh)	1.225	kg/m^3
ρ_{B_0} (gostota helija pri tleh)	0.09	kg/m^3
γ	0.00013	$1/m$

Kakšna je hitrost balona (v linearnem in turbulentnem režimu) na višini $H=10$ km?

V naslednjem primeru nas zanima na kateri višini se balon ustavi? Na to vprašanje je možno odgovoriti le v posebnih primerih, ki niso povsem realistični, so pa koristni za razumevanje problema. Za primer c.1) se balon giblje le dokler je gostota plina v balonu dovolj majhna v primerjavi z gostoto zraka v okolici. V tem primeru je radij balona konstanten. Iz enačbe ohranitve mase plina helija z višino, velja tudi, da je gostota helija v balonu z višino konstantna. To vstavimo v enačbo hitrosti (linerni in turbulentni režim). Izkaže se, da je maksimalna višina, ki jo balon lahko doseže enaka tako v linearnem kot turbulentnem režimu in znaša

$$H_{MAX} = -\frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{3M}{4\pi r^3 \rho_0} + \frac{\rho_{B_0}}{\rho_0} \right]$$

To je pričakovan rezultat, saj razlike v definiciji upora balona ne vplivajo na njegovo maksimalno doseženo višino, vplivajo pa na histrost dvigovanja balona do te višine.

V primeru predpostavk c.2) se izkaže da enačba $w = 0$ nima rešitve. V tem primeru namreč velja $\rho_B V_B = \rho_{B_0} V_{B_0}$ in $\rho_B/\rho = \rho_{B_0}/\rho_0$, kjer oznaka $_0$ predstavlja stanje pri tleh. Iz tu sledi $\rho_B = \rho \rho_{B_0}/\rho_0$ in $r_B^2 = r_{B_0}^2 \rho_0/\rho$. Torej radij balona in gostota balona sta oba funkciji višine. Ker ni nobene omejitve glede velikosti balona se bo balon dvigoval v neskončnost.

Izračunajmo še čas, ki ga balon potrebuje da doseže neko višino ($H=10$ km). To naredimo le za linearni režim za primera c.1) in c.2). Za primer konfiguracije c.1) lahko enačbo hitrosti prepišemo v obliko

$$-\frac{dh}{dt} = A(\rho_0 e^{-\gamma h} - \rho_{B_0})r_{B_0}^2 - \frac{B}{r_{B_0}}$$

Enačbo integriramo v intervalu $t \in [0, T]$ in $h \in [0, H]$ in dobimo rešitev

$$T(H) = \frac{1}{\gamma(B/r_{B_0} + A\rho_{B_0}r_{B_0}^2)} \ln \left[\frac{A(\rho_0 - \rho_{B_0})r_{B_0}^2 - B/r_{B_0}}{A(\rho_0 e^{-\gamma H} - \rho_{B_0})r_{B_0}^2 - B/r_{B_0}} \right]$$

V drugem primeru c.2) je enačba bolj preprosta, saj se poenostavi v obliko

$$-\frac{dh}{dt} = A''\rho_0 e^{-\gamma h}$$

$$A'' = A\rho_0^{2/3} \left(1 - \frac{\rho_{B_0}}{\rho_0}\right) r_{B_0}^2 - \frac{B}{r_{B_0}\rho_0^{1/3}}$$

Rešitev v tem primeru predstavlja enačba

$$T(H) = -\frac{3}{\gamma A''\rho_0^{1/3}} \left[e^{\gamma H/3} - 1 \right]$$

Obe enačbi lahko pretvorimo v inverzno obliko $H(T)$. Za zgoraj opisan nabor podatkov lahko izračunamo celoten potek ($H(T)$ oziroma $H(V)$) kot prikazuje slika 10.3. Kot je prikazano na sliki najhitreje potuje balon, ki ne spreminja svoje oblike. To je pričakovano saj v tem primeru sila trenja ni tako izrazita in dominira sila vzgona.

Nastavimo še enačbe za dodatno nalogo. Balonu se z višino spreminja oblika. To spreminjanje, je posledica ohranjanja mase plina v balonu in zmanjševanje gostote okoliškega zraka. Balon ima seveda določene lastnosti površinske napetosti, ki ohranja neko razmerje med tlakom v oziroma zunaj balona. Poglejmo si primer, kjer poleg drugih sil upoštevamo tudi površinsko napetost.

Bolj natančno o razumevanju površinske napetosti glej poglavje (link na Žiga section - ena naloga z površinsko napetostjo). Za primer sferičnega telesa (kot je na primer balon) lahko predpostavimo

$$p_B - p = \frac{4\alpha}{r_B},$$

kjer p_B predstavlja tlak v balonu, p tlak v okolici in α površinsko napetost. Upoštevamo še plinski zakon in da je plinska konstanta za helij $R_{d_{He}} = 4R_d$, kjer R_d predstavlja plinsko konstanto za suh zrak. Pogoji, ki ga dobimo je naslednje oblike

$$\rho_B 4R_d T_B - p = \frac{4\alpha}{r_B},$$

kjer je T_B temperatura v balonu. Upoštevamo še, da je masa helija v balonu konstantna iz kjer sledi $\rho_B r_B^3 = \rho_{B_0} r_{B_0}^3$.

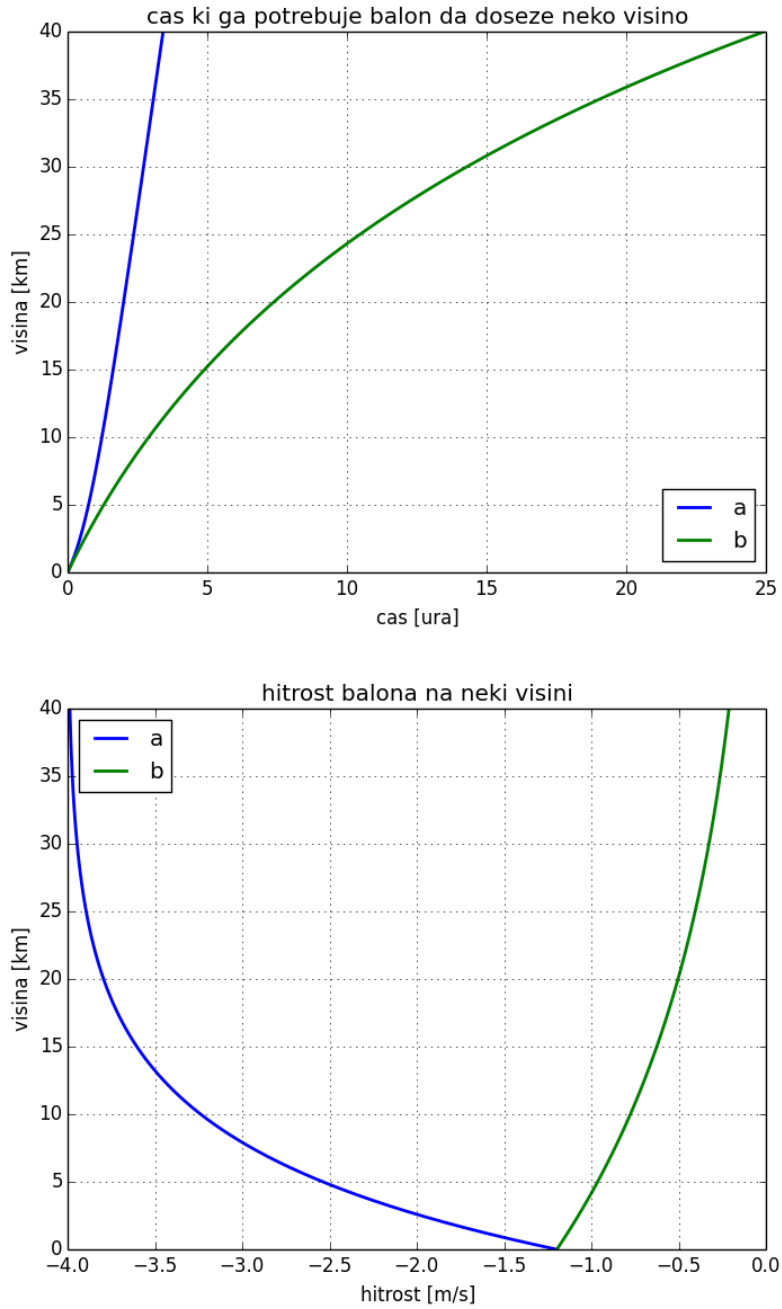
Predpostavimo, da se temperatura z višino linearno zmanjšuje $T = T_0 + Kz$ in da velja hidrostatsično ravnovesje. Iz tu sledi še enačba za zračni tlak

$$p = p_0 \left(1 + \frac{Kz}{T_0} \right)^{-\frac{g}{R_d K}}$$

Poiskusi za takšen primer razpisati enačbe (podobno kot zgoraj). Analitično reševanje je nekoliko bolj dolgotrajno saj je potrebno najprej rešiti polinom tretje stopnje in preveriti katere rešitve so smiselne. Problema se lahko lotiš tudi numerično.

Ocenimo še kako dobro velja približek o nepospešenem gibanju. V osnovi to kršimo z dodatnimi pogoji kot sta c.1) in c.2) definirana zgoraj. Za primer c.1) velja:

$$w = A(\rho_0 e^{-\gamma h} - \rho_B) r^2 - \frac{B}{r},$$



Slika 10.3: Potovanje balona v stratificirani atmosferi v primeru konfiguracije c.1) (a) in konfiguracije c.2) (b).

kjer sta r in ρ_B konstantna z višino. Pospešek izračunamo s preprostim odvajanjem, kjer dobimo:

$$a = \ddot{h} = -\gamma A r^2 \rho_0 e^{-\gamma h} w$$

V tej enačbi lahko opazimo, da največje vrednosti pospeška dobimo pri tleh, kar je pričakovano. Sedaj primerjamo silo $m\ddot{a}$ z silo vzgona, s čimer približno ocenimo kako dobro velja približek o nepospešenem gibanju balona.

$$\frac{m\ddot{h}}{\rho g V} = -\frac{16\rho_B\gamma r^2}{3C_0\mu}w$$

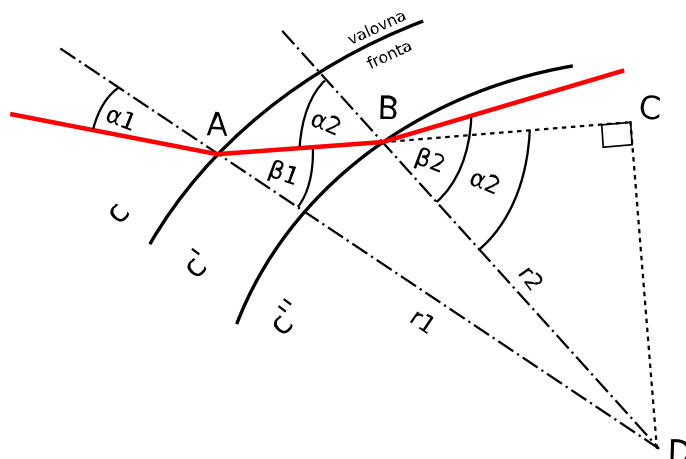
Za izbran set parametrov je vrednost tega razmerja normalizirana z hitrosjto w približno enaka $-1 \cdot 10^{-6}$. Torej, približek zelo dobro velja celo blizu tlem tudi pri večjih hitrotyh dvigovanja balona.

10.2 Meteorološki radar

10.2.1 Naloga - lom radarskih valov v atmosferi, pot žarka radarja

Žarki, izsevani iz radarja, se v atmosferi lomijo zaradi stratifikacije lomnega količnika.

- Izpelji enačbo, ki določa pot žarka projecirano na zemeljsko površje, kot funkcijo višine, ki ga le ta doseže. Upoštevaj sferičnost zemlje in lom na ukrivljeni površini (Snellow zakon za ukrivljene valovne fronte). Pri tem upoštevaj, da je stratifikacija lomnega količnika lahko poljubna.
- Kakšno višino doseže žarek na razdalji 150 km od radarja?
- Kolikšno napako naredimo (višina žarka nad tlemi) v točki b), če stratifikacije lomnega količnika ne upoštevamo?



Slika 10.4: Lom žarka na ukrivljeni valovni fronti - Snellow zakon.

Najprej ponovimo lom na ukrivljeni valovni fronti. Skica problema je predstavljena na sliki 10.4. Lom na neukrivljeni valovni fronti popisuje slavna enačba

$$n \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{c} = konst. \quad (10.2.1)$$

Iz skice pa velja naslednje

$$\begin{aligned} \sin(\beta_1) &= \frac{CD}{r_1} \\ \sin(\alpha_2) &= \frac{CD}{r_2} \end{aligned}$$

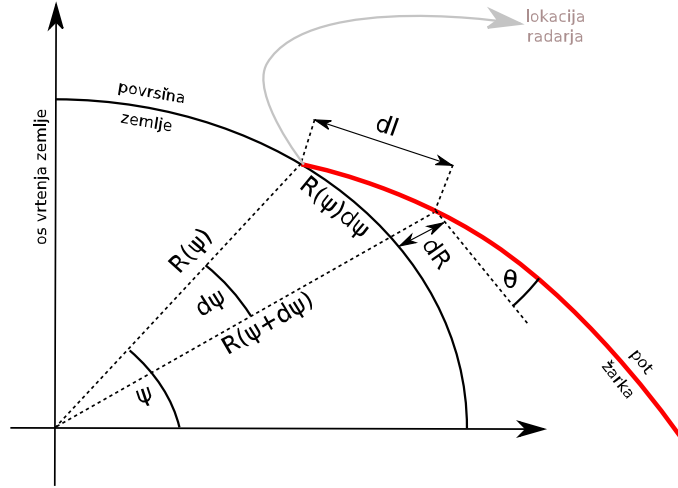
iz kjer sledi

$$\frac{\sin(\beta_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{r_2}{r_1}$$

To sedaj združimo z enačbo 10.2.1 in dobimo t.i. Snellow zakon

$$\frac{r \sin(\alpha)}{c} = rn(r) \sin(\alpha) = konst.$$

Opomba: zgornjo zvezo razumemo na naslednji način $\rightarrow r_1 n \sin(\alpha_1) = r_2 n' \sin(\alpha_2)$!



Slika 10.5: Pot žarka nad ukrivljeno površino zemlje.

Pod žarka nad sferično zemljo skicira slika 10.5. Kot ψ predstavlja kot v ravnini loma žarka na zemlji in R predstavlja radij zemlje. Iz diferenciala poti dl lahko zapišemo naslednje pogoje

$$dl = \sqrt{dR^2 + (R(\psi)d\psi)^2}$$

$$\cos(\theta)^2 = \frac{(R(\psi)d\psi)^2}{dR^2 + (R(\psi)d\psi)^2},$$

in

$$Rn(R)\cos(\theta) = c,$$

kjer c predstavlja neko konstanto (tipično pri tleh, kjer točno poznamo lomni količnik in kot žarka).

Cilj naloge je opisati pot žarka, kar popisuje $d\psi/dR$. Zadnjo enačbo spremenimo v

$$\cos(\theta)^2 = \frac{R^2}{\left(\frac{dR}{d\psi}\right)^2 + R^2}$$

in upoštevamo Snellow zakon

$$\cos(\theta)^2 = \frac{c^2}{R^2 n(R)^2}$$

Ko ti dve enačbi združimo dobimo željeno zvezo

$$\frac{d\psi}{dR} = \frac{c}{R\sqrt{R^2 n(R)^2 - c^2}}$$

Enačbo lahko še poenostavimo, kjer upoštevamo $R = a + h$ pri čemer je a (radij zemlje) konstanten. Pleg tega vpeljemo še $ds = ad\psi$ (s predstavlja t.i. 'great circle distance'). Ko to upoštevamo v zgornji enačbi lahko napišemo končno zvezo

$$s = \int_0^h \frac{acd h}{(a+h)\sqrt{(a+h)^2 n(h)^2 - c^2}} \quad (10.2.2)$$

$$c = an(a)\cos(\theta_e), \quad (10.2.3)$$

kjer θ_e predstavlja vpadni kot žarka pri radarju.

Ta zveza predstavlja pot žarka (projecirano na tla - great circle distance) kot funkcijo višine, ki jo doseže žarek. V nadaljevanju si bomo pogledali kako lahko to enačbo rešimo za preprost primer stratifikacije lomnega količnika v atmosferi.

Izpeljimo funkcijo $s(h)$ za primer preproste stratificirane atmosfere. Refleksivnost je definirana kot $N = \gamma(n-1)$, kjer n predstavlja lomni količnik in $\gamma = 10^{-6}$. V spodnjih plasti atmosfere dobro velja $dN/dh = K = -300 \text{ km}^{-1}$. Iz te enačbe lahko zapišemo funkcijsko odvisnost lomnega količnika v obliki:

$$n(h) = n_0 - \frac{K}{\gamma} h,$$

kjer je $K/\gamma = \beta = 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$. Torej, lomni količnik se z višino zmanjšuje. Iz lomnega zakona sledi, da se žarek ukrivlja proti površju zemlje, kar tudi pričakujemo.

Uporaba funkcije $s(h)$ zahteva nekaj poenostavitev enačbe 10.2.3. Velja namreč $a \gg h$, kar pomeni da lahko integral lineariziramo. Upoštevamo razvoj do prvega reda

$$\begin{aligned} (1 \pm x)^{-1} &= 1 \mp x \dots \\ (1 \pm x)^{-2} &= 1 \mp 2x \dots \end{aligned}$$

Enačbo 10.2.3 lahko sedaj prepišemo v obliko

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dh} &= \frac{ac}{(a+h)\sqrt{(a+h)^2(n_0 - \beta h)^2 - c^2}} \\ &= \frac{ac}{(a+h)^2 \sqrt{(n_0 - \beta h)^2 - \frac{c^2}{(a+h)^2}}} \\ &= \frac{ac}{(a+h)^2 \sqrt{n_0^2 + \beta^2 h^2 - 2n_0\beta h - \frac{c^2}{a^2}(1 - 2\frac{h}{a} + \dots)}} \end{aligned}$$

V zadnji vrstici lahko zanemarimo vse kvadratne člene h^2 , še posebej člen $\beta^2 h^2$, kar enačbo poenostavi v obliko

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dh} &\approx \frac{ac}{(a+h)^2} \frac{1}{\sqrt{A_0 + B_0 h}} \\ A_0 &= n_0^2 - \frac{c^2}{a^2} \\ B_0 &= 2\left(\frac{c^2}{a^3} - n_0\beta\right) \end{aligned}$$

Podobno lahko sedaj lineariziramo še prvi člen enačbe in obdržimo samo linearni člen, kar privede do končne oblike enačbe

$$\frac{ds}{dh} \approx \frac{c}{a} \frac{1}{\sqrt{A_0 + B_0 h}} - 2 \frac{c}{a^2} \frac{h}{\sqrt{A_0 + B_0 h}}$$

Integral lahko rešimo s pomočjo

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{A_0 + B_0 h}} &= \frac{c}{a} \frac{2}{B_0} \sqrt{A_0 + B_0 h} \Big|_0^h \\ 2 \frac{c}{a^2} \int_0^h \frac{h dh}{\sqrt{A_0 + B_0 h}} &= 4 \frac{c}{a^2} \frac{B_0 h - 2A_0}{3B_0} \sqrt{A_0 + B_0 h} \Big|_0^h \end{aligned}$$

Kar privede do končne rešitve

$$s = \frac{2c}{B_0 a} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{B_0 h - 2A_0}{a} \right) \left(\sqrt{A_0 + B_0 h} - \sqrt{A_0} \right)$$

Vrednost parametrov, ki jih tipično lahko uporabimo so naslednji

parameter	vrednost	enote
n_0	1.0003	
β	$0.3 \cdot 10^{-6}$	
θ_e	5	stopinj
a	$6.4 \cdot 10^{-6}$	m

Vpliv linearizacije integranta je prikazan na slikah 10.6 za več različnih začetnih elevacij. Kot je razvidno iz slik je jasno, da linearizacija dobro velja v spodnjih plasteh atmosfere, z višino pa se napake seštevajo, kar lahko privede do zelo napačnih rezultatov. Linearizacija drži še posebej dobro v primeru večjih elevacij.

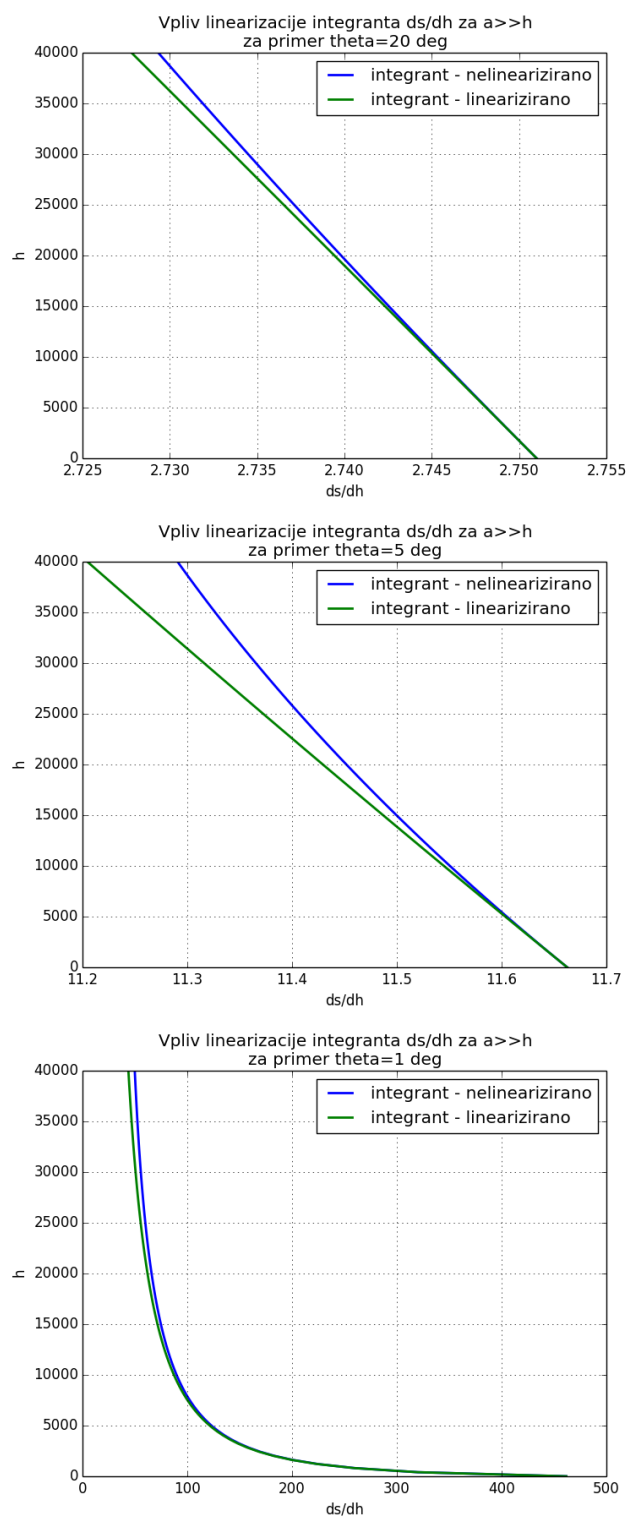
Naloga sprašuje po napaki v višini, ki ga doseže žarek na neki razdalji od radarja v primeru, da ne upoštevamo $n(h)$. Torej zanima nas funkcijska odvisnost $h(s)$. V izbranem primeru se moramo problema lotiti iterativno. To storimo tako, da enačbo preoblikujemo v obliko

$$h_{nov} = \frac{1}{B_0} \left[\left(\frac{s B_0 a}{2c} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3} \frac{B_0 h - 2A_0}{a} \right)} + \sqrt{A_0} \right)^2 - A_0 \right]$$

Iteracijo začnemo z neko oceno za h (~ 40 km) in po enačbi izračunamo h_{nov} . Tega vstavimo v h in postopek ponovimo 2-3 krat, dokler h ni določen dovolj natančno. Izračunaj h za primer ko je $s = 100$ km in za dva različna primera (upoštevajoč neničeln β in $\beta = 0$). To lahko iz vrednotimo tudi numerično, kar kot primer prikazuje slika 10.7. Slika jasno prikazuje, da so lahko napake (v primeru upoštevanja, da je lomni količnik konstanten) zelo velike, predvsem pri zelo nizkih elevacijah.

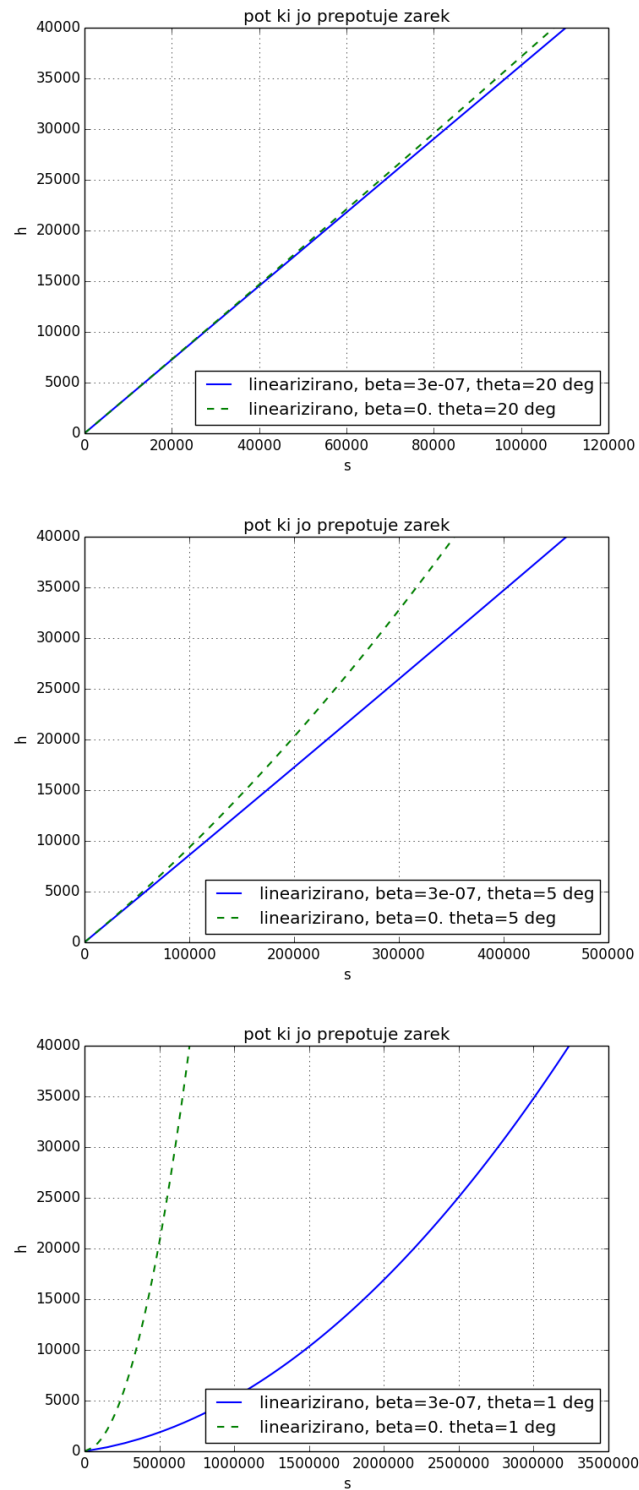
10.2.2 Naloga - Maksimalni doseg radarja

Radar z valovno dolžino $\lambda = 10$ cm ima anteno z ojačanjem $g_t = 10000$. Oцени, kolikšna je maksimalna razdalja, do katere radar 'še vidi', če ima sposobnost zaznavati signale z močjo večjo od $\sim 10^{-12}$ W. Predpostavimo, da na poti ni nobenih oslabitev, da je sipalni presek za sipanje nazaj $\sigma_b = 1$ m² in da je izhodna moč na anteni $P = 1$ kW. Kakšno napako naredimo pri tej oceni, če namesto efektivnega preseka (površine) antene



Slika 10.6: Vpliv linearizacije integranta pri različnih vrednosti začetne elevacije (20 stopinj (zgoraj), 5 stopinj (v sredini) in 1 stopinja (spodaj)). Višina na y osi je v enotah metrov.

upoštevamo njen pravi presek? Tu upoštevaj, da je pasovna širina (ang. bandwidth) glavnega žarka 1^0 . Naloga je deloma povzeta po nalogi 3.1 [4].



Slika 10.7: Potek $s(h)$ radarskega žarka v atmosferi za primer stratificirane in nestratificirane atmosfere v lomnem količniku. Potek je prikazan za tri različne začetne elevacije: 20 stopinj (zgoraj), 5 stopinj (v sredini) in 1 stopinja (spodaj).

Na vprašanje, 'kako daleč vidi radar?', odgovorimo z radarsko enačbo, ki jo lahko na hitro izpeljemo za naš preprost primer.

Izsevno gostoto energije na razdalji r od radarja, pri čemer zanemarimo oslabitve v

atmosferi, lahko zapišemo kot

$$S_i(\theta, \phi, r) = \frac{P_i}{4\pi r^2} g_t f^2(\theta, \phi) ,$$

kjer je P_i izhodna moč na anteni radarja, g_t ojačitev antene in f funkcija, ki definira obliko vzorca oddane gostote moči na anteni. Ker nas zanima le teoretično maksimalni doseg v smeri glavnega žarka ('main lobe') postavimo $f^2(\theta = 0^0, \phi = 0^0) = 1$. Na razdalji r od radarja se del sevanja siplje na sipalcu nazaj v smeri proti radarju. Tako je gostota energije na razdalji r od sipalca (torej pri radarju) enaka:

$$S_r = \frac{P_i}{4\pi r^2} g_t \frac{\sigma_b}{4\pi r^2} . \quad (10.2.4)$$

Moč, absorbirana na anteni je odvisna od efektivnega preseka antene, ki je definiran kot:

$$A_e = \frac{g_t \lambda^2}{4\pi} f^2(\theta, \phi) \cong \frac{g_t \lambda^2}{4\pi} . \quad (10.2.5)$$

Ta parameter v enotah m^2 ima zelo podobno vlogo kot presek za absorbcijo in definira, kolikšen del gostote moči se absorbira na anteni! Moč odbitega signala zbrana na anteni kot posledica sipanja na sipalcu iz razdalje r je tako enaka:

$$P_r = S_r A_e, \quad (10.2.6)$$

Oceniti želimo maksimalni doseg radarja za primer, ko je $P_r = 10^{-12}$ W. Z upoštevanjem enačb 10.2.4, 10.2.5, 10.2.6 zapišemo

$$r_{max} = \left(\frac{\sigma_b g_t A_e}{(4\pi)^2} \left(\frac{P_i}{P_r} \right) \right)^{1/4} .$$

Ocenimo maksimalni doseg radarja še na drug način. Namesto efektivnega preseka upoštevamo pravi presek antene $A' = \pi(D/2)^2$, kjer D predstavlja njen premer. Za oceno velikosti antene uporabimo enačbo, ki definira pasovno širino glavnega radarskega žarka (kot pri katerem se gostota moči zmanjša za 3 dB):

$$\Delta\theta \simeq 1.27 \frac{\lambda}{D} ,$$

kjer $\Delta\theta$ predstavlja pasovno širino v radianih, v našem primeru $1^0 \rightarrow \pi/180$ radianov. Tako izračunani maksimalni doseg radarja je enak:

$$r'_{max} = r_{max} \left(\frac{A'}{A_e} \right)^{1/4} .$$

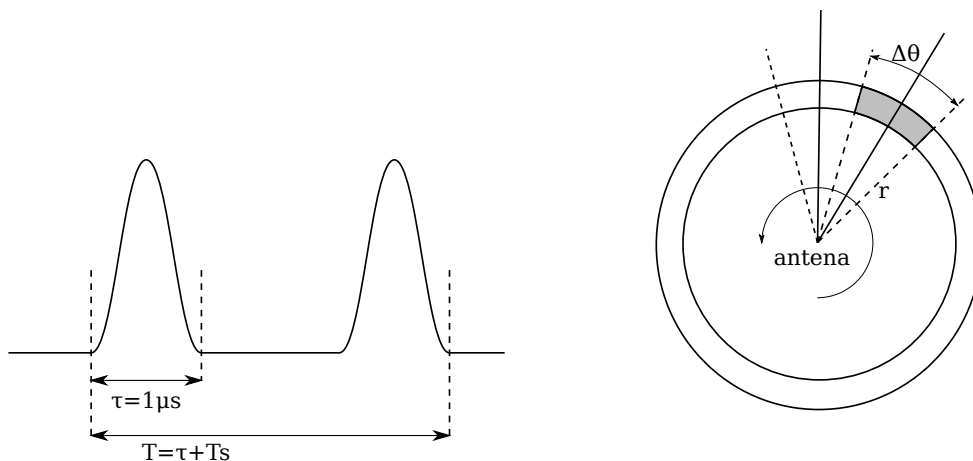
Za izbran set podatkov izračunamo željene količine, ki so zbrane v tabeli 10.1. Primerjava r_{max} in r'_{max} kaže na to kako pomembno je uporabiti efektivni presek antene, ki pa je predvsem funkcija valovne dolžine radarja!

10.2.3 Naloga - Radarska antena

Kako hitro (maksimalno število obratov) se lahko vrti antena radarja z valovno dolžino 10 cm premere 7 m, da ima radar maksimalni doseg 200 km? Kolikšen je volumen zraka znotraj enega pulza širine $1 \mu s$ na tej maksimalni razdalji? Predpostavi, da je pasovna širina signala 1^0 (3dB širina glavnega žarka).

Tabela 10.1: Zbrani rezultati naloge 'Maksimalni doseg radarja'.

parameter	vrednost
A_e	15.916 m^2
D	7.276 m
A'	41.586 m^2
r_{max}	31685 m
r'_{max}	40280 m

Slika 10.8: Skice pripadajoče nalogi 'radarska antena'. Radarski pulzi (levo) in desno shema vrtenja antene, kjer je $\Delta\theta$ 3 dB kot znotraj glavnega radarskega žarka.

Čas potreben, da signal prepotuje do razdalje r_{max} in nazaj, popišemo s preprosto enačbo, kjer upoštevamo svetlobno hitrost potovanja signala c .

$$c = 2r_{max}f_r, \quad (10.2.7)$$

kjer $f_r = 1/T_s$ predstavlja frekvenco ponavljanja pulzov (ang. pulse repetition frequency), prikazano na sliki 10.8. Faktor 2 upoštevamo, ker signal naredi dvakrat daljšo pot (do sipalca in nazaj)!

V času med dvema pulzoma T_s se mora antena obrniti ravno za kot $\Delta\theta$. To je pasovna širina (prostorski kot, ki predstavlja 3 dB moči na glavnem žarku). Kot (v radianih) izrazimo ko

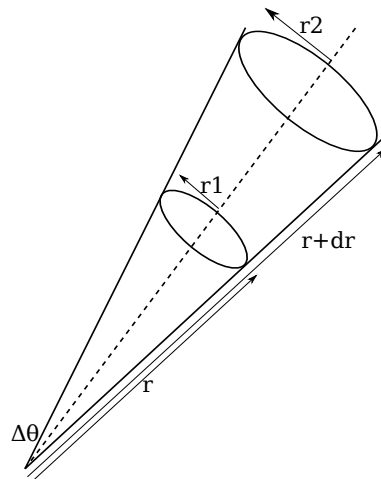
$$\Delta\theta = 1.27 \frac{\lambda}{D}. \quad (10.2.8)$$

Opisana ideja vrtenja antene je prikazana na sliki 10.8 (desno), kjer osenčeno območje predstavlja del prostorskega kota, ki ga vidi radar preden se obrne za kot $\Delta\theta$. Vrtenje antene opišemo s kotno hitrostjo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \approx \Delta\theta f_r.$$

V zgornji enačbi upoštevamo še enačbo za pasovno širino 10.2.8 in enačbo za hitrost signala 10.2.7 in dobimo

$$\omega = 1.27 \frac{\lambda}{D} \frac{c}{2r_{max}}.$$



Slika 10.9: Skice pripadajoče nalogi 'radarska antena'. Volumen zraka viden v času enekga pulza τ_s .

Vstavimo podatke in dobimo $\omega = 13.607 \text{ rad/s}$. To pretvorimo v frekvenco $\nu = \omega/2\pi$, kar znaša $\nu \approx 2 \text{ s}^{-1}$. Maksimalna hitrost vrtenja antene pri zgornjih predpostavkah je torej dva obrata na sekundo. Jasno je, da je to precej velika kotna hitrost za običajni meteorološki radar (vojaški radarji se lahko vrtijo mnogo hitreje). In res, za primer radarja na Pasji Ravni, je frekvenca vrtenja nekje 5 obratov na minuto, oziroma $\nu = 0.083 \text{ s}^{-1}$. Kaj je razlog?

Izkaže se, da ima ena sama meritev v volumnu zraka na razdalji r od antene pravzaprav precej veliko napako. Bolje je torej meriti večkrat znotraj enakega volumna in te meritve med seboj povprečiti, tako napako drastično zmanjšamo.

Predpostavimo sedaj, da velja, da radar v istem volumnu zraka na razdalji r napravi $N = 25$ meritev (tako naj bi bilo na radarju na Pasji Ravni). Koliko je sedaj maksimalni doseg radarja če ostali podatki ostanejo nespremenjeni, pri čemer se antena sedaj vrti z $\nu_{pravi} = 0.083$ obratov na sekundo.

V tem primeru velja

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{NT_s} = \frac{\Delta\theta f_r}{N} = 2\pi\nu_{pravi}$$

in

$$r_{max} = \frac{1.27\lambda c}{4\pi N\nu_{pravi}D}$$

Vstavimo podatke in dobimo $r_{max} = 208.742 \text{ km}$.

Drugi del naloge je preprosta ocena volumna zraka ki ga vidi radar v času τ_s . To prikazuje skica 10.9.

Približno velja (kot $\Delta\theta = 1^\circ$) da je $r_1 \approx r_2$. Potem je volumen

$$V = \Delta r \pi r_1^2,$$

kjer velja

$$\Delta r = c\tau_s$$

in

$$\Delta\theta = 1.27 \frac{\lambda}{2r_1}$$

Za izbrane podatke dobimo $V \approx 3 \text{ km}^4$!

10.2.4 Naloga - Decibeli

V radarski meteorologiji se tipično uporablja relativna skala decibelov. S tem ponazorimo moč signala in radarsko odbojnost. Pokaži, da velja:

- ko moč povečamo za dvakrat, moč povečamo za ~ 3 dB
- ko moč povečamo za faktor 10, moč povečamo za ~ 10 dB

Odgovori še na nekaj vprašanj (brez kalkulatorja $\rightarrow$ z uporabo zgornjih dveh pravil):

- Koliko decibelov več od 4 W predstavlja 64 W moči?
- Koliko decibelov več od 10 W predstavlja 1000 W moči?
- Koliko decibelov več od 1 W predstavlja 80 W moči?

Izračunaj koliko dB radarske odbojnosti je enakovredna intenziteti padavin (0.01, 1, 10, 40, 100) mm/h ?

Vrednost količine X v decibelih je definira kot razmerje:

$$X_{dB} = 10 \log_{10} \frac{X}{X_0} ,$$

kjer je X_0 tipično neka referenčna vrednost. Za primer moči se tipično uporablja $P_0 = 1 mW$ in za primer radarske odbojnosti $Z_0 = 1 mm^6/m^3$!

Dokažimo zgornji trditvi. Velja

$$X_{dB} = 10 \log_{10}(2^n) = 10 n \log_{10}(2) \sim 3.01 n ,$$

kjer je v našem primeru $n = 2$, in

$$X_{dB} = 10 \log_{10}(10) = 10$$

Sedaj odgovorimo na tri vprašanja.

- Koliko decibelov več od 4 W predstavlja 64 W moči?

$$P_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{64}{4} \right) = 10 \log_{10}(2^4) \sim 12$$

- Koliko decibelov več od 10 W predstavlja 1000 W moči?

$$P_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1000}{10} \right) = 10 \log_{10}(100) = 10 \log_{10}(10^2) = 20 \log_{10}(10) = 20$$

- Koliko decibelov več od 1 W predstavlja 80 W moči?

$$P_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{80}{1} \right) = 10 \log_{10}(80) = 10 \log_{10}(2^3 \cdot 10)$$

$$P_{dB} = 10 \log_{10}(2^3) + 10 \log_{10}(10) = 9.01 + 10 \sim 19$$

Sedaj izračunajmo vrednosti radarskih odbojnosti za primer nekaj tipičnih vrednosti intenzivnosti padavin. Uporabimo enačbo

$$Z = a R^b ,$$

kjer je Z radarska odbojnost v mm^6/m^3 in R intenzivnost padavin v mm/h . Parametra a , b sta odvisna od tipa padavin. Za dež velja $a = 200$ in $b = 5/8$.

Tabela 10.2: Povezava med radarsko oslajnostjo in intenzivnostjo padavin za primer dežja.

R [mm/h]	Z [mm ⁶ /m ³]	Z [dB]
0.01	0.126	-9
0.1	5.024	7
1	200.0	23
10	7962.143	39
40	73168.808	48
100	316978.638	50

10.2.5 Naloga - Oslabitev v oblakih

Izračunaj oslabitev za $\lambda = 3$ cm in 10 cm v primeru ko se signal propagira skozi oblak debeline 5 km. Predpostavi, da so kapljice v oblaku porazdeljene po Marshall-Palmarjevi porazdelitvi

$$\frac{\partial n}{\partial D} = N(D) = N_0 e^{-\gamma D} ,$$

kjer je v oblaku 5000 kapljic v kubičnem metru zraka in $N_0 = 10^7$ 1/m⁴. Velja še $Im(-K_m) = 3.67 \cdot 10^{-5}$ pri $\lambda = 3$ cm in $1.1 \cdot 10^{-5}$ pri $\lambda = 10$ cm. Naloga je deloma povzeta po nalogi 3.6 [4].

Delci v oblakih prispevajo k oslabitvam radarskega signala, ki se propagira v atmosferi. Tipično k oslabitvam prispevajo tako sipanje izven smeri propagacije kot tudi absorbcija v snovi, ki le to segreva. Za primer majhnih oblačnih delcev lahko predpostavimo Rayleighov režim sipanja, kjer je sipalni koeficient $\sigma \propto D^6$. Za majhne delce je to tipično zanemarljivo v primerjavi z absorbcijo za katero velja, da je absorpcijski koeficient

$$\sigma_a \approx \frac{\pi D^3}{\lambda} Im(-K_m) ,$$

kjer $Im(-K_m)$ predstavlja imaginarni del kompleksnega lomnega indeksa. Oslabitev v snovi (spomni se radarske enačbe, kjer nastopa l^2) debeline d definiramo kot

$$l = \exp \left(- \int_0^d k_a dr \right) ,$$

pri čemer definiramo oslabitveni koeficient z

$$k_a \approx \int_0^\infty N(D) \sigma_a dD . \quad (10.2.9)$$

Tu $N(D)$ predstavlja številsko gostoto delcev v oblakih. Opišemo jo z Marshall-Palmerjevo porazdelitvijo

$$N(D) = \frac{\partial n}{\partial D} = N_0 e^{-\gamma D} ,$$

kjer n predstavlja število delcev premera na intervalu $(D, D + dD)$ na enoto volumna. Povedano drugače, integral te porazdelitve po vseh možnih premerih predstavlja število delcev v kubičnem metru zraka

$$N = \int_0^\infty N(D) dD .$$

Izbrana porazdelitev je eksponentna, kar pomeni, da je v oblaku relativno veliko zelo majhnih delcev!

Za izračun oslabitve potrebujemo najprej izračunati oslabitveni koeficient k_a . Z upoštevanjem zgornjih enačb dobimo

$$k_a = \frac{\pi^2}{\lambda} \text{Im}(-K_m) \int_0^\infty N(D) D^3 dD . \quad (10.2.10)$$

Integral je zelo podoben količini, ki predstavlja tretji moment porazdelitve $N(D)$, t.i. vodnost (masa vse vode v kubičnem metru zraka). Tu se najprej spomnimo na maso vodne kapljice

$$M_v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v .$$

kjer je ρ_v gostota vode. Ker pa imamo v kubičnem metru zraka kapljice različnih velikosti, je njihova skupna masa (t.i. vodnost) vsota po vseh kapljicah, torej integral

$$M = \frac{4\pi\rho_v}{3} \int_0^\infty N(D) r^3 dD ,$$

kjer upoštevamo, da je $D = 2r$. Tako dobimo

$$M = \frac{\pi\rho_v}{6} \int_0^\infty N(D) D^3 dD$$

Izraz spominja na del enačbe 10.2.10 za oslabitveni koeficient, katerega lahko sedaj prepišemo v končno obliko

$$k_a = \frac{6\pi M \cdot \text{Im}(-K_m)}{\rho_v \lambda} .$$

Najprej izračunajmo vodnost M . Tu je potrebno nekaj integriranja

$$M = \frac{\pi\rho_v}{6} \int_0^\infty N_0 e^{-\gamma D} D^3 dD ,$$

pri čemer zaporedno integriramo po delih (per partes)

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

in po nekaj korakih pridemo do enačbe

$$M = \frac{\pi\rho_v}{6} \left[N_0 e^{-\gamma D} \left(\frac{D^3}{-\gamma} - \frac{3D^2}{\gamma^2} + \frac{6D}{-\gamma^3} - \frac{6}{\gamma^4} \right) \right]_0^\infty .$$

Po L'Hopitalovem pravilu so vsi členi tipa $D^n e^{-\gamma D} = 0$ v limiti ∞ . To privede do preproste enačbe

$$M = \frac{\pi\rho_v N_0}{\gamma^4} ,$$

kjer pa ne poznamo faktorja γ . Tega lahko ocenimo iz prvega momenta porazdelitve (t.i. število delcev v volumnu zraka)

$$N = \int_0^\infty N(D) dD .$$

Za $N(D)$ vstavimo enako porazdelitev kot zgoraj in dobimo $\gamma = N_0/N = 2000 \text{ m}^{-1}$. Potem lahko izračunamo še vodnost $M = 0.00196 \text{ kg/m}^3$, kar predstavlja celotno maso vode v kubičnem metru zraka v oblaku. To je dokaj tipična vodnost reda 1 g/m^2 !

Sedaj izračunajmo absorpcijski/oslabitveni koeficient ter oslabitev, kjer namesto integrala po celotnem oblaku enostavno množimo $k_a d$, kjer $d = 5$ km predstavlja debelino oblaka. Vstavimo vse parametre v enačbo zgoraj in dobimo vrednosti predstavljene v tabeli 10.3. Najprej opazimo, da so oslabitve praktično zanemarljive. Drugo pa, da so oslabitve manjše pri večjih valovnih dolžinah. To je pomembna opazka. Hkrati pa se spomnimo, da si želimo čim bolj usmerjeno polje (majhno $\Delta\theta$), kar pa dobimo samo če uporabljamo majhne valovne dolžine - spomni se enačb v prejšnji nalogi. Torej napraviti moramo nek kompromis, saj je absorpcija večja za primer majhnih valovnih dolžin!

Tabela 10.3: Rezultati.

valovna dolžina [cm]	$k_a [m^{-1}]$	l (oslabitev) [%]
3	$4.51 \cdot 10^{-8}$	99.977
10	$4.063 \cdot 10^{-9}$	99.998

10.2.6 Naloga - Primerjava oslabitve zaradi padavin in plinov

Poznamo profil intenzivnosti padavin

$$R = -\frac{(r - 100)^2}{8} + 50$$

v mm/h, ki velja na intervalu $80 \leq r \leq 120$ km, sicer je $R = 0$. Med anteno radarja in tem padavinskim območjem ni nobenih drugih plasti, ki bi povzročale oslabitev, razen plinov. Predpostavi da je kot elevacije antene 0° , da ima radar valovno dolžino $\lambda = 3, 5$ ali 10 cm.

- Nariši R in pripadajoč koeficient oslabitve v padavinski plasti, brez upoštevanja oslabitve v plinih.
- Nariši oslabitev (v eno smer) za to padavinsko plast.
- Primerjaj z oslabitvijo v plinih za različne valovne dolžine radarja. Kaj opaziš?

Naloga je deloma povzeta po nalogi 3.7 [4].

Tipično v primeru padavin definiramo t.i. specifični koeficient oslabitve v enotah dB/km

$$K = 4.34 \cdot 10^3 \int_0^\infty N(D) \sigma(D) dD ,$$

kjer je $\sigma = \sigma_a + \sigma_s$ vsota preseka za absorpcijo in sipanje. Ta je povezana s klasičnim koeficientom oslabitve v enotah m^{-1} prek enačbe

$$K = 4.34 \cdot 10^3 k .$$

Opomba: pazi tu na enote, namreč k je v enotah m^{-1} in K v enotah dBkm⁻¹!

V primeru padavinskih delcev lahko uporabimo znano R-Z (R-X) relacijo kjer velja, da je specifičen koeficient oslabitve enak

$$K = aR^b ,$$

kjer sta a in b odvisna od tipa radarja kot je prikazano v tabeli 10.4.

Tabela 10.4: Parametri oslabitve v padavinskih delcih.

λ [cm]	a	b
10	0.000343	0.97
5	0.0018	1.05
3	0.01	1.25

Najprej skicirajmo funkcijo $R(r)$. To je kvadratna funkcija, tako da lahko najprej izračunamo njen maksimum, torej odvod $\partial R/\partial r = 0$. Izkaže se, da je maksimum v točki $r = 100$ km in znaša $R = 50$ mm/h. V limitnih primerih ($r = 80, 120$ km) je vrednost $R = 0$ mm/h. To je torej preprosta zvonasta krivulja, ki je prikazana na sliki 10.10 (a).

Potem skiciramo specifični koeficient oslabitve. Ta bo še vedno približno zvonaste oblike, se pa razlikuje za različne valovne dolžine, kot prikazuje tabela 10.4. V maksimumu (pri $r = 50$ km) lahko izračunamo vrednost K , ki je enaka 0.01525 dB/km za $\lambda = 10$ cm, 0.10944 dB/km za $\lambda = 5$ cm in 1.32957 za $\lambda = 3$ cm. To prikazuje slika 10.10 (b).

Nato izračunamo oslabitev L_p za primer padavin, ki pa je sedaj v primeru specifičnega oslabitvenega koeficienta definirana v enotah dB (spomni se enačb v eni izmed prejšnjih nalog)

$$L_p = 10 \log l_p = - \int_{r_1}^{r_2} K dr ,$$

kjer sta $r_1 = 80$ km in $r_2 = 120$ km. l_p je parameter ki bi nastopil v radarski enačbi kot oslabitev!

Postavimo v integral in predpostavimo, da je parameter b približno enak 1 za vse primere valovnih dolžin (tabela 10.4). Potem lahko napišemo

$$L_p = - \int_{r_1}^{r'} a \left(- \frac{(r - A_0)^2}{A_1} + A_2 \right) dr ,$$

kjer so $A_0 = 100$ km, $A_1 = 8$ km, $A_2 = 50$ km in $r_1 = 80$ km. Predpostavimo, da integriramo samo za $r' \leq 120$ km. Dobimo

$$L_p(r') = a \left[\frac{1}{3A_1} \left((r' - A_0)^3 - (r_1 - A_0)^3 \right) - A_2(r' - r_1) \right] ,$$

ki je bolj natančno narsana na sliki 10.10 (c) samo znotraj padavinskega oblaka. Opomba: funkcija narisana je pravzaprav $-L_p$. Oblika funkcija kaže, kako se pri vstopu elektromagnetnega valovanja v oblak oslabitev začne počasi povečevati in ob izstopu doseže njen maksimum. Najhitreje oslabitev raste v sredini padavinskega oblaka, kot lahko že sklepamo iz porazdelitve intenzivnosti padavin funkcije $R(r)$. Opomba: ko se elektromagnetno valovna je širi naprej iz oblaka je potrebno pri nadaljnih izračunih seveda upoštevati $\max(L_p)$! Pomebno je še (na sliki to ni predstavljeno direktno), da je $\max(L_p)$, ki je dosežen pri $r' = 120$ km, različen za različne valovne dolžine, kot je prikazano v tabeli 10.5. Razvidno je, da do največjih oslabitev prihaja pri majhnih valovnih dolžinah, podobno kot je bilo razvidno že iz prejšnje naloge. Dodatno izračunamo še oslabitev, ki bi potencialno nastopala v radarski enačbi l_p , kar je dodano v tabeli 10.5. Vidimo, kako se pri $\lambda = 3$ cm signal zmanjša praktično na samo 26 % prvotne vrednosti, ko ta izstopi iz oblaka!

Zadnji del naloge pravi naj primerjamo to oslabitev z oslabitvami v plinu, ki pa je zvezno razporejen v ozračju. V našem primeru bomo samo ocenili, kakšna je razlika. Krivulje, ki prikazujejo oslabitev v plinu $2L_g$ (pomnoženo z 2) za več različnih primerov elevacije radarja, so prikazane na sliki 10.11. Narisan je primer $\lambda = 10$ cm. Za primer

Tabela 10.5: Oslabitev L_p za primer padavinskega oblaka v nalogi 'oslabitve v padavinski plasti'.

λ [cm]	$\max(L_p)$ [dB]	l_p
10	0.4573	0.9553
5	2.3999	0.7866
3	13.33	0.2636

$\lambda = 5$ cm je potrebno krivulje pomnožiti z 1.2 in za primer $\lambda = 3$ cm s faktorjem 1.5. V nalogi nas zanimajo oslabitve L_g na razdalji 120 km od radarja in sicer za najnižjo možno elevacijo 0° . Opazimo lahko, da za primer velikih valovnih dolžin radarja prevladuje oslabitev zaradi plinov v atmosferi, pri majhni valovni dolžini pa mnogo bolj prevladujejo oslabitve na padavinskih delcih. To vse velja seveda za naš preprost primer padavinske plasti debele 40 km postavljene na 100 km od radarja, kjer je maksimalna intenzivnost padavin 50 mm/h!

10.2.7 Naloga - Kompromis med maksimalno izmerjeno hitrostjo in maksimalnim dosegom radarja

Pokaži, kako sta povezani enačbi za maksimalni doseg radarja in maksimalno hitrost, ki jo je možno meriti, dokler ne pride do potujitve signala (aliasing).

Potujitev je pogost problem, ki se pojavi, kadar vzorčimo signal s premajhno frekvenco. Rekonstruiran signal tako ne odraža pravega signala. Radarski signal, prikazan na sliki 10.8 (levo), je sklop pulzov, ki so med seboj razmaknjeni za čas $1/f_r$, kjer je f_r t.i. 'pulse repetition frequency'. Največji doplerjev zamik, ki ga lahko izmerimo, je pogojen z največjo frekvenco v signalu, ki jo še lahko izmerimo. To je

$$f_a = \frac{f_r}{2}.$$

Doplerjev zamik pa je definiran

$$\omega_D = 2\pi\nu_D = -4\pi\frac{v_r}{\lambda},$$

kjer je v_r radialna hitrost. Ko vstavimo f_a namesto ν_D v enačbo zgoraj, dobimo enačbo maksimalne hitrosti, ki jo še lahko izmerimo

$$v_r^{MAX} = \frac{f_r}{4\lambda}.$$

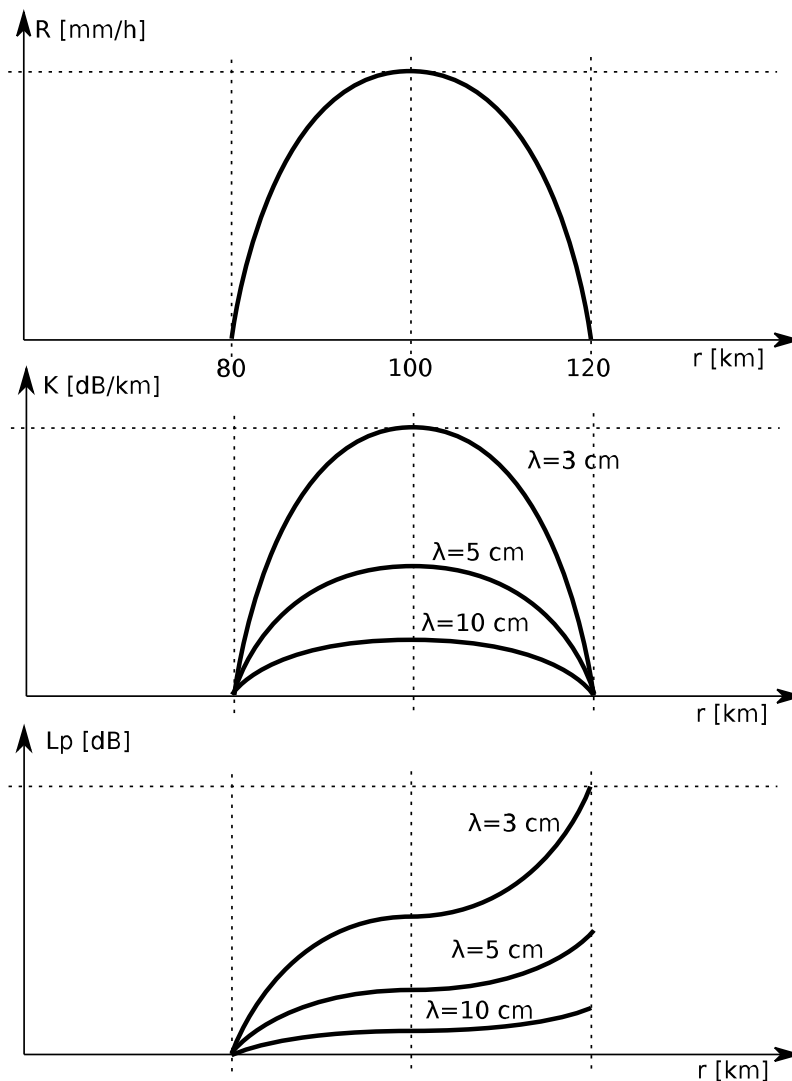
Največji doseg radarja je prav tako funkcija f_r , velja namreč

$$2r^{MAX} = \frac{c}{f_r},$$

torej

$$r^{MAX} = \frac{cf_r}{2}.$$

V obeh enačbah nastopa f_r , razlika je le, da enkrat v imenovalcu in drugič v števcu. Torej iz tega je razvidno, da radar ne more istočasno izmeriti neskončno velike hitrosti in imeti neskončno velikega dosega!



Slika 10.10: Rešitve pri nalogi oslabitve v padavinski plasti.

10.2.8 Naloga - Radialna hitrost: kaj vidi radar/lidar?

Kako vidita radar in lidar hitrostno polje v okolice antene? Namig: upoštevaj, da lahko hitrostno polje blizu izvora zapišeš z razvojem v Taylorjevo vrsto.

Nariši polje radialne hitrosti $u_r(x, y)$ pri značilnih elevacijah antene, za primer:

- veter je konstanten povsod, z višino se ne spreminja in vertikalna hitrost je 0,
- kot a) vendar za primer zonalnega vetra ($v = 0$) in $\partial u / \partial z \neq 0$,
- kot b), kjer velja, da je veter maksimalen v sredini plasti $u = u_0 + A \sin(kz)$.

V tej nalogi si pogledjmo, kako vidi radar/lidar hitrostno polje blizu svojega sprejemnika. Poudarek je na 'blizu', kar nam omogoča razvoj polja v Taylorjevo vrsto do prvega reda

$$\vec{v}(\vec{r}_0 + \vec{\Delta r}) = \vec{v}(\vec{r}_0) + J \vec{\Delta r} ,$$

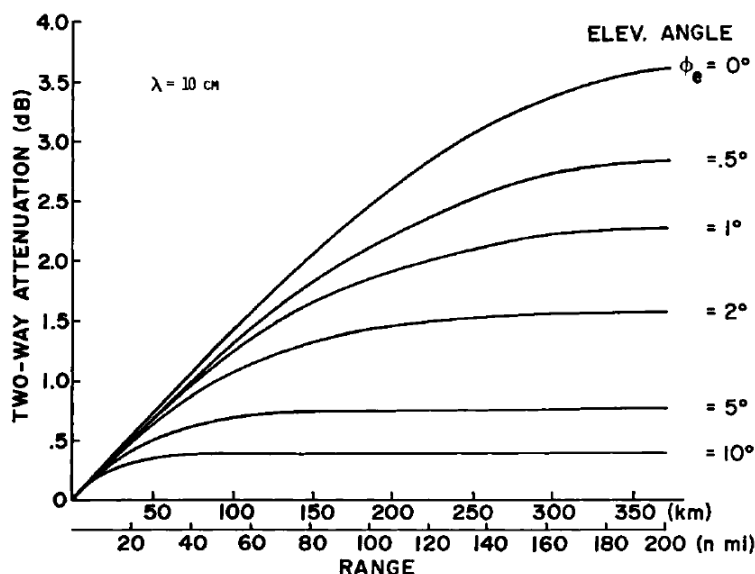


Fig. 3.6 Attenuation (two-way) for propagation through a standard atmosphere ($\lambda = 10$ cm). Central Radio Propagation Laboratory's (CRPL) exponential reference atmosphere (Fig. 2.7) is used to compute ray paths, and the pressure-temperature profile is based on the International Civil Aviation Organization (ICAO) standard atmosphere.

Slika 10.11: Oslabitev v plinu v atmosferi za primer več elevacij radarja. Prikazana je $2L_g = 20 \log l_g$ v enotah dB.

kjer hitrostno polje na lokaciji sprejemnika $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ definiramo kot $\vec{v}(\vec{r}_0) = (u_0, v_0, w_0)$. Definiramo še $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, kjer je $\vec{r} = (x, y, z)$. Jacobijeva matrika J pa je definirana z odvodi:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Torej hitrostno polje v točki $\vec{r} = (x, y, z)$ razvito okoli točke ('sprejemnik' radarja, lidarja) $\vec{r}_0$ lahko zapišemo kot:

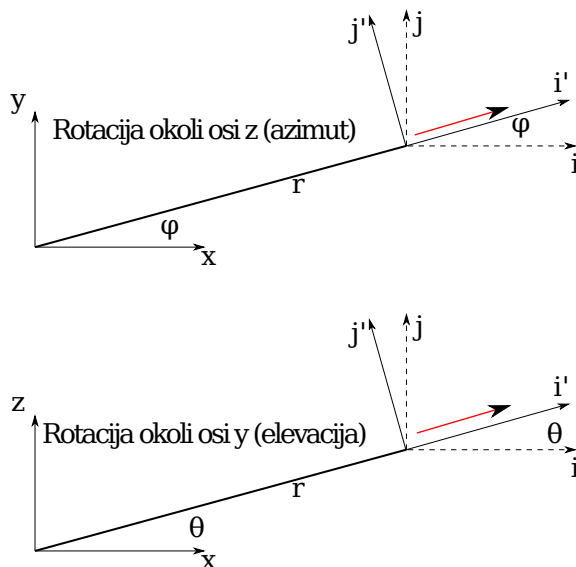
$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix},$$

kjer smo uvedli $\Delta x = x - x_0$ in $\Delta y = y - y_0$ ter $\Delta z = z - z_0$. Vse skupaj lahko zapišemo krajše:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{bmatrix}$$

Radar in lidar vidita radialno hitrost. Torej komponenta hitrosti v smeri $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. To je le ena komponenta celotnega vektorja $\vec{v}$ definiranega na lokaciji $\vec{r}$! **Torej radar/lidar ne vidi celotnega 3D vetra.**

Radialno hitrost v_r lahko enostavno izračunamo iz $\vec{v}$ z uporabo rotacijskih matrik, kjer uporabimo rotacijo koordinatnega sistema okoli osi z (azimut) in okoli osi y (elevacija) kot je prikazano na sliki 10.12.



Slika 10.12: Rotacija (elevacija in azimut) za primer izpeljave radialne komponente vetra (označena z rdečimi puščicami) v primeru radarja oziroma lidarja!

Rotacijski matriki za rotacijo koordinatnega sistema (i, j) v (i', j') , okoli osi z in y sta definirni kot:

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Celotno rotacijo popišemo z rotacijsko matriko $R = R_z \cdot R_y \cdot R_x$. $R_x = I$ (ni rotacije okoli osi x) torej

$$R = R_z \cdot R_y = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi & -\sin \phi \sin \theta + \cos \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Radialno hitrost končno definiramo kot (x komponento) produkta rotacijske matrike in vektorja vetra na lokaciji $\vec{r}$

$$u_r = R \cdot \vec{v}(\vec{r}) \Big|_x.$$

Velja še:

$$\Delta x = r \cos \phi \cos \theta$$

$$\Delta y = r \sin \phi \cos \theta$$

$$\Delta z = r \sin \theta.$$

Sedaj si pogledjmo, kako to uporabimo v zgornjih primerih

- a) V tem primeru je veter povsod konstanten (vsi odvodi so enaki 0). Velja še $w_0 = 0$, torej

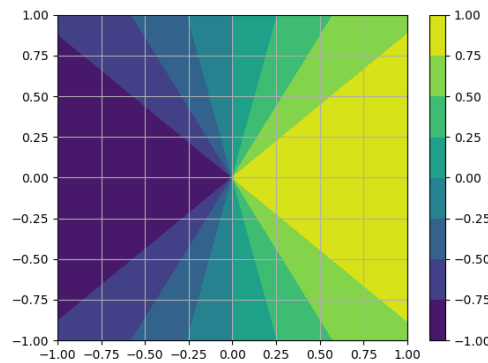
$$u_r = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$u_r = (u_0 \cos \phi + v_0 \sin \phi) \cos \theta .$$

Najprej opazimo, da se s povečevanjem zenitnega kota na intervalu $[0, \pi/2]$, vrednost u_r zmanjšuje proti vrednosti 0 (pri $\theta = \pi/2$). Največja je pri elevaciji $\theta = 0$.

Predpostavimo še $v_0 = 0$ (le zonalni veter). V tem primeru velja $u_r = u_0 \cos \phi \cos \theta$. Torej za azimut ϕ na intervalu $[\pi/2, 3\pi/2]$ je $u_r < 0$, sicer $u_r > 0$. u_r prav tako ni odvisna od razdalje r od sprejemnika iz česar lahko zaključimo, da so izolinijske konstantne u_r kar premice skozi središče koordinatnega sistema (x, y) kot prikazuje slika 10.13. Radialna hitrost, ki jo vidi radar/lidar pa se zmanjšuje z azimutom!



Slika 10.13: Radialna hitrost v primeru konstantnega polja hitrosti. Vrednosti na oseh so simbolične.

- b) Drugi primer je podoben a), vendar tu dodatno predpostavimo še $\partial u / \partial z \neq 0$. Torej velja

$$u_r = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Upoštevamo še $\Delta z = r \sin \theta$ iz česar sledi:

$$u_r = (u_0 + \frac{\partial u}{\partial z} r \sin \theta) \cos \phi \cos \theta ,$$

kar preuredimo v

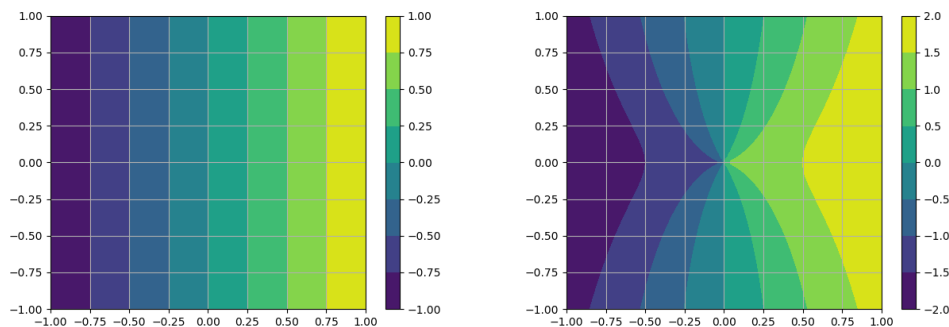
$$u_r = u_0 \cos \phi \cos \theta + \frac{1}{2} r \frac{\partial u}{\partial z} \sin 2\theta \cos \phi ,$$

kjer je prvi del že znan iz naloge a). Naredimo primer za $\partial u / \partial z > 0$. Odvisnost od elevacije θ je tu nekoliko durgačna - velja namreč, da je drugi člen zgornje enačbe sicer še vedno pozitiven na intervalu $\theta [0, \pi/2]$, vendar ima maksimum pri $\theta = \pi/4$ in minimum (vrednost je enaka 0) pri $\theta = 0$ in $\theta = \pi$.

Recimo, da narišemo u_r za primer $\theta = \pi/4$. Sedaj v drugem členu enačbe opazimo, da u_r narašča z oddaljenostjo od antene. Opomba: pri večji oddaljenosti od antene Taylorjev približek ne velja več. Celotno enačbo nekoliko poenostavimo:

$$u_r = (C_0 + C_1 r) \cos \phi ,$$

iz česar lahko sklepamo, da so sedaj izolinije nekoliko drugačne, kot prikazuje slika 10.14. To si je lahko predstavljati. Pri neki elevaciji bo radar videl različne plasti hitrostnega polja. Ker se z višino hitrost povečuje, bo radar na večji oddaljenosti videl večjo hitrost. Ker pa je veter le zonalen, bo z večjimi azimuti hitrost vedno manjša za enako oddaljenost od radarja ali lidarja!



Slika 10.14: Radialna hitrost v primeru konstantega polja hitrosti (zonalni veter) in $\partial u / \partial z > 0$. Primer ko je zonalna hitrost enaka nič (levo) in primer ko je zonalna hitrost pozitivna (desno). Vrednosti na oseh na sliki so simbolične.

c) Tretji primer je kot primer b) vendar sedaj predpostavimo

$$u = u_0 + A \sin(kz)$$

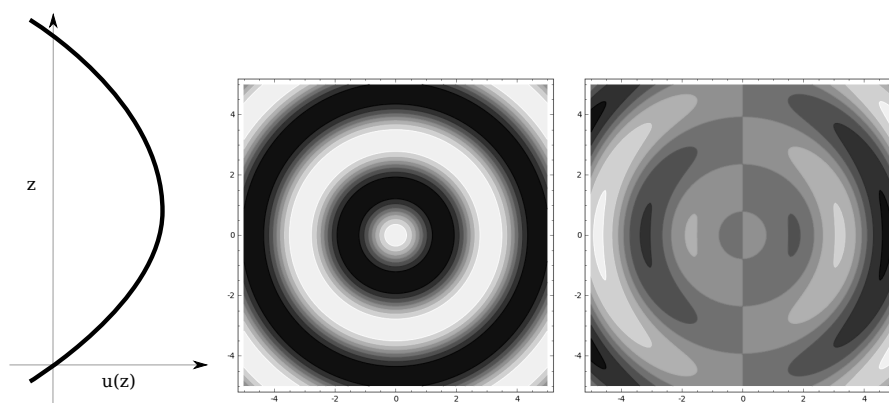
Profil je definiran, kot je prikazano na sliki 10.15 (levo). Torej definiran je le s pol periode! Upoštevamo $z = r \sin \theta$, izvednotimo $\partial u / \partial z$ ter enačbo zgoraj prepišemo v

$$u_r = (u_0 \cos \theta + \frac{1}{2} r A k \cos(kr \sin \theta) \sin 2\theta) \cos \phi$$

Opomba: člen $\sin(kz)$ je nastavljen tako, da je samo pol periode sinusa med tlemi in vrhom atmosfere (slika 10.15 levo)! Torej je veter povsod pozitiven.

Drugi člen se sedaj zdi malo bolj kompliciran ampak v resnici je zelo preprost. Izolinije (brez upoštevanja $\cos \phi$ so koncentrični krogi). To predstavlja slika 10.15 (levo). Torej imamo izmenjujoče se minimume in maksimume. Razlog je v tem da je hitrost največja nekje v vmesni plasti, namjajša pa je pri tleh in na vrhu atmosfere. Ko dodamo še azimuth antene $\cos \phi$ je končni rezultat podoben kot na sliki 10.15 (desno). Opomba: sliki sta simbolični in ne upoštevata zgoraj napisanega pravila (samo pol periode med tlemi in vrhom atmosfere). Na slikah dobimo preveč izmenjav med pozitivnimi in negativnimi polji (v resnici dobimo le dva minimuma in en maksimum oziroma obratno).

Glavni zaključek pri tej nalogi je lepo razviden iz vseh rešitev. Ko radar oziroma lidar gleda pravokotno na smer vetra, bo hitrost, ki jo vidi enaka 0. Torej radialna hitrost vidi le del komponente celotnega vetra. Ta zaključek je pomemben, ko želimo veter izmerjen iz takšnih naprav uporabiti za izboljšanje začetnih pogojev v numeričnem napovedovanju vremena.



Slika 10.15: Radialna hitrost v primeru konstantega polja hitrosti (zonalni veter) in $\partial u / \partial z = \cos(z)$! Črna barva (maksimum) in bela (minimum). Levo je prikazan hitrostni profil kot funkcija višine, v sredini je prikazan del rešitve ko ne upoštevamo $\cos\phi$ in desno je prikazano polje hitrosti u_r kot ga vidi radar za ta primer.

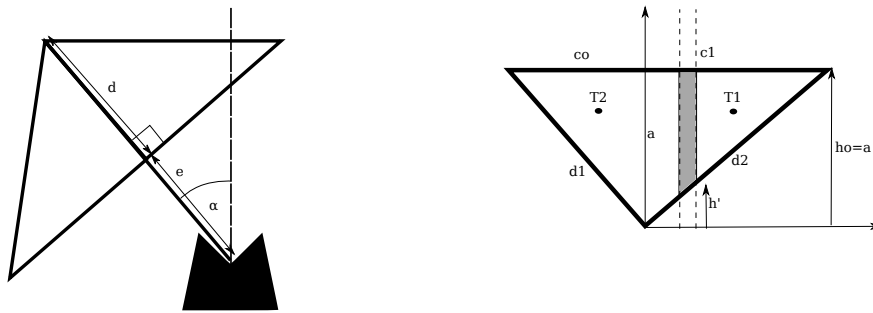
10.3 Napredno merjenje padavin

10.3.1 Naloga - Merjenje padavin z ombrometrom na prekucno posodico

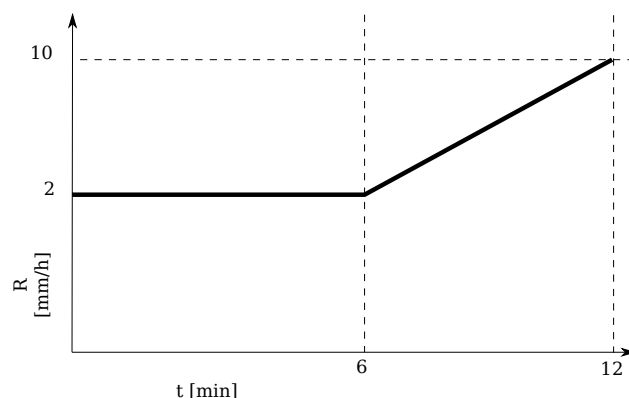
Intenziteto padavin lahko merimo z ombrometrom na prekucno posodico. Geometrijske lastnosti so prikazane na sliki 10.16.

Vprašanja:

- Kakšen volumen vode (in s tem intenziteta padavin) je potreben, da se posodica prekucne na drugo stran. Pri tems poznamo $\alpha = 30^\circ$, $e = 2$ cm in debelina posodice (dimenzija v z smeri) znaša $c = 3$ cm? Zanemarimo vpliv mase posodic (čeprav je to precej nerealistično)!
- Profil intenzitete padavin v času prikazuje slika 10.17. Skiciraj čase preklopov ombrometra. Skiciraj tudi kaj bi dobili z rednim štetjem preklopov na vsake 1 min, 3 min.

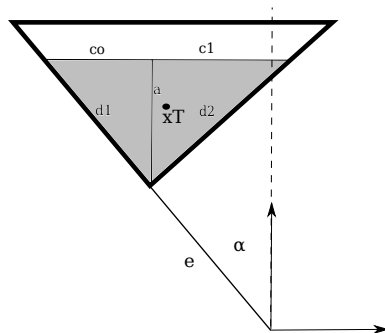


Slika 10.16: Konfiguracija ombrometra na prekucno posodico (levo) in izbira koordinatnega sistema za izračun težišča posodice (desno).



Slika 10.17: Potek intenzitete padavin, ki jo potencialno meri ombrometer na sliki 10.16.

Najprej je potrebno izračunati težišče posodic, ko se polnijo s tekočino (vodo). Zanima nas le limitni primer, ko je vode v posodici dovolj, da se posodica prevaga na drugo stran.



Slika 10.18: Dodatek k izračunu za primer ombrometra na sliki 10.16.

Ta volumen vode je tisti limitni volumen, ki nam pove, koliko padavin se izmeri pri enem preklopu. Težišče računamo po naslednji enačbi

$$x_T = \frac{1}{M} \int_0^V \rho(x) x dV$$

oziroma

$$x_T = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

Za lažje računanje najprej prestavimo središče koordinatnega sistema, kot prikazuje slika 10.16. Iz simetrije opazimo, da lahko najprej izračunamo težišče samo za desni trikotnik in potem še za levi, potem pa iz enačbe zgoraj izračunamo skupno težišče. Iz izbire koordinatnega sistema je tudi jasno, da potrebujemo izračunati samo x komponento težišča. Velja namreč, da se posodica prekucne natanko takrat, ko se x komponenta težišča na sliki 10.16 (levo) premakne na desno stran vertikalne črtkane črte (vpetje posodic na tla).

Torej izračunajmo najprej x_{T_1} pri predpostavki, da poznamo vse ključne količine d_1 , d_2 , a , itd.

$$x_{T_1} = \frac{1}{M} \int_0^V \rho(x) x dV, \quad (10.3.1)$$

kjer velja $dV = c(a - h')dx$. Iz geometrije pa velja še $h' = kx$, kjer k ocenimo iz naklona spodnje stranice posodice, tako da velja $h' = (a/c_1)x$. To vstavimo v zgornje enačbe in dobimo

$$dV = \rho a c \left(1 - \frac{x}{c_1}\right) dx.$$

Velja še $M = \rho V$, kjer je $V = c_1 a c / 2$. Enačbo 10.3.1 sedaj zapišemo kot

$$x_{T_1} = \frac{2}{c_1} \int_0^{c_1} x \left(1 - \frac{x}{c_1}\right) dx,$$

iz kjer sledi $x_{T_1} = c_1/3$. Iz tu pa sledi tudi $x_{T_2} = -c_0/3$. Skupno težišče obeh trikotnikov pa izračunamo takole

$$x_T = \frac{\rho V_0 \left(\frac{c_0}{3}\right) + \rho V_1 \frac{c_1}{3}}{\rho V_0 + \rho V_1}.$$

Po krajšem računanju dobimo $x_T = (c_1 - c_0)/3$. Sedaj je potrebno definirati, kdaj se posodica preklopi. S pomočjo slike 10.18 lahko hitro ugotovimo, da mora veljati

$$\sin \alpha = x_T,$$

kar pomeni, da se posodica preklopi, ko bo težišče x_T padlo na drugo stran črtkane črte na sliki 10.18. Iz slike opazimo še, da velja

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c_1} = \frac{c_0}{a} .$$

Dobimo

$$\sin \alpha = \frac{a}{3} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} \right)$$

in po krajšem računanju

$$\begin{aligned} a &= 3e \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \\ c_1 &= 3e \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha} \\ c_0 &= 3e \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} \operatorname{tg}\alpha . \end{aligned}$$

Vrednosti zgornjih parametrov so za naše podatke $a = 3.464$ cm, $c_0 = 2$ cm in $c_1 = 6$ cm. Sedaj lahko izračunamo potreben volumen tekočine v posodici, da se le ta prekucne. Tu velja

$$V = \frac{ac}{2}(c_0 + c_1) ,$$

kar znaša $V \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ (oziroma 40 cm^3). Ta volumen pa lahko sedaj pretvorimo v mere, ki so bolj blizu intenzivnosti padavin. To je kar višina vodnega stolpca na površini 1 m^2 . Za izračunan volumen je ta stolpec visok $h_{\max} = 0.04$ mm. To predstavlja maksimalno višino stolpca vode potrebnega za en preklap. Lahko pa si razlagamo tudi takole, če se v eni uri ravno napolni posodica to predstavlja intenzivnost padavin $R = 0.04 \text{ mm/h}$!

Sedaj rešimo še b) del naloge. Na sliki 10.17 je potrebno narisati preklope ombrometra za pravkar izračunan maksimalen volumen posodic preden preklopi. Ločimo dva dela

- a) V prvih 6 min je R konstanten, torej so tudi časi preklapov enakomerno razporejeni. Čas potreben, da posodica napolni volumen $R = 2 \text{ mm/h}$ se izračuna preprosto iz križnega računa

$$t_{\text{preklap}} = h_{\max} \frac{T}{R(T)} ,$$

kjer je $T = 1 \text{ h}$ in $R(T) = 2 \text{ mm/h}$ kot razvidno iz slike 10.17. Za pravkar izračunan $h_{\max}$ velja $t_{\text{preklap}} = 1.2 \text{ min}$. To pomeni da v prvih 6 minutah posodica preklopi na vsake 1.2 minute, kar v tem intervalu 6 minut nanese 5 preklapov.

- b) V času od 6 minut naprej pa R linerano narašča z časom. To pomeni da bo tudi število preklapov povečevalo z časom! Najprej izračunajmo kako se R spreminja z časom, velja namreč $R = R_0 + \beta t$. Iz geometrije na sliki 10.17 velja

$$\beta = \frac{R' - R''}{t_1 - t_2}$$

in

$$R_0 = R' - \beta t_1 ,$$

kjer $R' = 2 \text{ mm/h}$, $t_1 = 6 \text{ min}$, $R'' = 10 \text{ mm/h}$ in $t_2 = 12 \text{ min}$ (iz slike 10.17). Za izbrane vrednosti velja $\beta = 80 \text{ mm/h}^2$ in $R_0 = -6 \text{ mm/h}$.

Polnjenje posodice opišemo z enačbo

$$V = \int_0^T R(t) A dt ,$$

kjer $R(t)$ predstavlja potek intenzivnosti padavin v času, A predstavlja površino 1 m^2 iz česar lahko napišemo

$$h_{max} = \int_0^T R(t) dt$$

oziroma

$$h_{max} = \int_{T_0}^{T_1} (R_0 + \beta t) dt = R_0(T_1 - T_0) + \frac{\beta}{2}(T_1^2 - T_0^2).$$

Ta enačba predstavlja polnjenje posodic za primer lineranega naraščanja R . Torej za znani čas T_0 in že izračunani maksimalen stolpec vode, ki ga lahko izmeri ena posodica, iščemo čas naslednjega preklopa T_1 . Torej iščemo rešitev za T_1 . To je preprosta kvadratna enačba z rešitvijo

$$T_1 = A + \sqrt{T_0^2 + BT_0 + C},$$

kjer $A = -R_0/\beta = 0.075 \text{ h}$, $B = 2R_0/\beta = -0.15 \text{ h}$ in $C = 2h_{max}/\beta + R_0/\beta^2 = 0.0067 \text{ h}^2$. Rekurziven izračun poda čase prekipov ombrometra v času od 6 min naprej, kot prikazuje tabela 10.6.

Tabela 10.6: Časi prekipov ombrometra za primer lineranega naraščanja R v primeru slike 10.17.

T_0 [min]	T_1 [min]
6	6.3
6.3	7.6
7.6	8.1
8.1	8.6
8.6	9
9	9.4
9.4	9.7
9.7	10.1
10.1	10.4
10.4	10.7
10.7	11
11	11.2
11.2	11.5
11.5	11.8
11.8	12

Opazimo lahko, da so razlike v časih še vedno dokaj konstantne (okoli 0.3 min), ampak če bi tako nadaljevali, bi videli da se te razlike kasneje zmanjšujejo!

V drugem delu pa nas zanima, kaj pravzaprav vidimo iz meritev ombrometra. Ombrometer meri število prekipov posodic v nekem intervalu. Kaj izmeri za primer, ko je ta interval dolg 1 min in za primer, ko je dolg 3 min? Iz števila prekipov na interval časa lahko potem ocenimo intenzivnost padavin $R_{ocena} = Nh_{max}/\Delta t$, kjer je N število prekipov in Δt interval časa (1 min, 3 min, itd.).

Rešitev prikazujeta tabeli 10.7 za enominutno vzorčenje in 10.8 za triminutno vzorčenje. Štetje prekipov znotraj intervala je potekalo tako, da štejemo vse preklope, ki padejo na časovni interval $(t_{min}, t_{max}]$. R_{ocena} je izračunan po zgornji enačbi in R_{pravi} predstavlja vrednost izračunane iz slike 10.17. V obeh primerih opazimo kar nekaj odstopanj

med R_{ocena} in R_{pravi} , vendar opazimo, da so te nekoliko manjše za primer triminutnega vzorčenja. Ombrometer v osnovi torej povprečuje in rabimo zadosten interval, da lahko primerno opazujemo intenzivnost padavin nad ombrometrom.

Tabela 10.7: Časi preklopov ombrometra za primer lineranega naraščanja R v primeru slike 10.17 in 1 minutnega vzorčenja.

interval [min]	št. preklopov	R_{ocena} [mm/h]	R_{pravi} [mm/h]
0-1	0	0	2
1-2	1	2.4	2
2-3	1	2.4	2
3-4	1	2.4	2
4-5	1	2.4	2
5-6	1	2.4	2
6-7	1	2.4	2.6
7-8	1	2.4	4
8-9	3	7.2	5.3
9-10	2	4.9	6.6
10-11	4	9.6	8
11-12	4	9.6	9.3

Tabela 10.8: Časi preklopov ombrometra za primer lineranega naraščanja R v primeru slike 10.17 in 3 minutnega vzorčenja.

interval [min]	št. preklopov	R_{ocena} [mm/h]	R_{pravi} [mm/h]
0-3	2	1.6	2
3-6	3	2.4	2
6-9	5	4	4
9-12	10	8	8

10.4 Dodatne naloge za vajo

10.4.1

Radar se nahaja na nadmorski višini 500 m. Radarski signal je v smeri proti 30 km oddaljenemu in 3000 m visokemu gorovju usmerjen tako, da gre ravno preko vrha gore. Radar v isti smeri na oddaljenosti 100 km od radarja zazna padavine. Koliko časa mine, da zaznane padavine dosežejo tla na višini morske gladine, če privzamemo, da vse kapljice padajo s hitrostjo 10 m s^{-1} ?

10.4.2

Radar zazna padavine 10 km nad tlemi. Ravnovesna vertikalna hitrost padanja kapljic je 10 m s^{-1} . Poznamo tudi vertikalni profil horizontalnega vetra:

$$v(h) = \begin{cases} 10 \left(\frac{h}{1000 \text{ m}} \right)^2 \text{ m s}^{-1}, & h < 1000 \text{ m} \\ 10 \sqrt{\frac{h}{1000 \text{ m}}} \text{ m s}^{-1}, & h \geq 1000 \text{ m} . \end{cases}$$

Kako daleč od izhodišča padejo kapljice na tla, če upoštevamo, da je Zemlja a) ravna ali b) okrogla. Kakšna je razlika v razdalji?

10.4.3

Polarno-orbitalni satelit kroži okoli Zemlje na višini 500 km. Kolikšna mora biti njegova hitrost, da lahko vzdržuje konstantno višino? Pri tem upoštevaj, da se velikost težnostnega pospeška z naraščajočo oddaljenostjo od Zemeljskega površja zmanjšuje. Vidni kot senzorja, ki meri koncentracijo aerosolov, je 45° , vendar zgolj v smeri $\vec{s}$, pravokotni na vektor hitrosti satelita $\vec{v}$, tako da velja $\vec{s} = \vec{v} \times \vec{k}$. Senzor je usmerjen v smeri $\vec{s}$ pod kotom 22.5° glede na vertikalo $\vec{k}$. Kolikšen delež Zemeljskega površja prečeše satelit v 1 uri? Najprej predpostavi, da je Zemlja (kot jo vidi nizkoleteči satelit) ravna ploskev. Rezultat primerjaj s tistim, ki ga dobiš, če upoštevaš, da je površje Zemlje sferično simetrično z radijem 6371 km.

10.4.4

Polarno-orbitalni satelit kroži okoli Zemlje na višini 1000 km. Satelit ima senzor usmerjen direktno pod sabo. Vidni kot senzorja je 50° . Kolikšen delež zemeljskega površja pregleda v pol ure? Privzamemo, da se v tem času Zemlja ne zavrti in da je površina Zemlje, kakršno vidi satelit, ravna.

1. DODATNO VPRAŠANJE (TEŽJE): kakšna pa je rešitev, če privzamemo, da je Zemlja krogla z radijem 6371 km?

2. DODATNO VPRAŠANJE (TEŽJE): kaj pa, če poleg zgornje predpostavke upoštevamo še, da se tudi Zemlja vrti. Kolikšen delež zemeljskega površja pregleda satelit v pol ure, če se trenutno nahaja točno nad ekvatorjem (NAMIG: relativna hitrost satelita glede na Zemljo se tako poveča za obodno hitrost vrtenja Zemlje. Pozor, ta ni povsod enaka!)

10.4.5

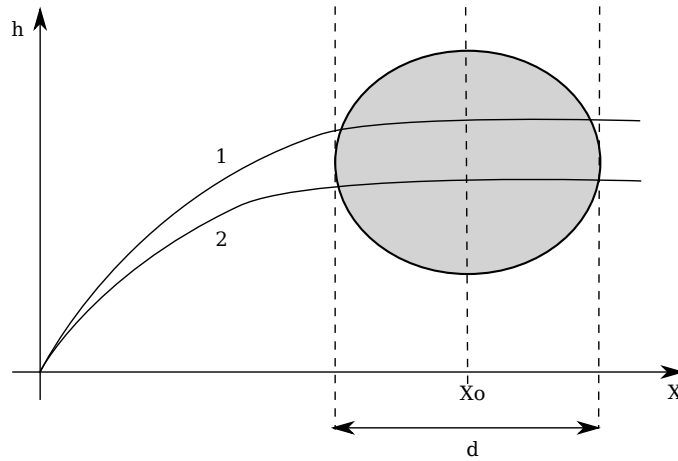
Z radarjem pri dveh različnih elevacijah (označeni z 1 in 2 na Sliki 10.19) skeniramo območje na oddaljenosti $x_0 = 250 \text{ km}$. Na območju $x \in [x_0 - d/2, x_0 + d/2]$ se pojavi oblačna plast z vodnostjo

$$M(x, h) = M_0(h) \left[1 - \frac{4(x - x_0)^2}{d^2} \right] ,$$

kjer je $M_0(h)$ funkcija višine h . Radarski signal zaradi absorbcije v oblaku oslabi za faktor l (oslabitev v eno smer).

Kakšna je razlika v vodnosti M_0 v oblaku na dveh različnih višinah kot posledica dveh različnih elevacij antene, če poznamo razmerje oslabitev $l_1/l_2 = 1.00001$? Pri tem predpostavimo, da se radarski signal znotraj oblaka debeline $d = 5$ km širi vzporedno s telemi, valovna dolžina radarskega signala je 10 cm, imaginarni del lomnega količnika pa $\mathcal{J}(-K) = 1.1 \times 10^{-5}$. Predpostavi tudi, da do oslabitve v oblaku pride le zaradi absorbcije s koeficientom:

$$k_a = \frac{\pi^2}{\lambda} \mathcal{J}(-K) \int N(D) D^3 dD .$$



Slika 10.19: Skica k nalogi 10.4.5.

10.4.6

Radarski signal pri elevaciji 0 stopinj na oddaljenosti $R_0 = 150$ km od antene doseže oblačno plast, ki se razteza na razdalji $r \in [R_0, \infty]$. Vidbist v oblaku je na tej elevaciji konstantna $M(r) = M_0 = 0.002 \text{ kg m}^{-3}$. Na kateri razdalji r_{max} od antene radar “še vidi”, če velja, da je minimalna prejeta moč na anteni $P = 10^{-12} \text{ W}$, izhodna moč na anteni pa znaša $P_0 = 1000 \text{ W}$? Kakšna je na tej razdalji oslabitev v eno smer (1)?

Radarski signal ima valovno dolžino 5 cm. V oblaku pride do oslabitve zaradi absorbcije v oblačnih delcih s koeficientom $k = 6\pi M \mathcal{J}(-K_m)/(\rho_v \lambda)$, kjer ρ_v predstavlja gostoto vode. Imaginarna komponenta lomnega količnika v oblačni plasti znaša 3.67×10^{-5} . Predpostavimo, da lahko radarsko enačbo zapišemo v obliki $\frac{P}{P_0} = \alpha l^A r^B$, kjer je $\alpha = 25.6 \times 10^{-6} \text{ m}^4$.

Namig: izpelji radarsko enačbo, da določiš parametra A in B , maksimalno razdaljo oceni na 1 m natančno.

10.4.7

Na razdalji $r_0 = 150$ km od radarja se nahaja oblačna plast debeline $2d_0$, kjer je $d_0 = 5$ km. Vodnost kot funkcija razdalje od radarja je definirana takole:

$$M(r) = M_0 \left[1 - \frac{(r - r_0)^2}{d_0^2} \right] ,$$

kjer je $M_0 = 0.002 \text{ kg m}^{-3}$ maksimalna vodnost v plasti, r_0 pa je razdalja med radarjem in centrom oblačne plasti. Radarski signal se siplje na kapljicah. Razmerje prejete

moči in oddane moči signala na radarski anteni za ta primer je $1.00001 \cdot 10^{-12}$. Pri tem predpostavimo, da je edini vir oslabitve signala v atmosferi omenjene oblačna plast.

Reši sledeči nalogi:

alph* Po 15 minutah ko ponovno usmerimo radar v to smer se vodnost v oblaku poveča iz M_0 na M_0^* , pri tem pa struktura oblaka ostaja enaka. Kakšna mora bit vrednost M_0^* , da radar še vedno vidi oblačno plast? Pri tem upoštevamo, da je minimalna moč, ki jo še lahko merimo z radarjem, določena z minimalnim razmerjem prejete in oddane moči na radarski anteni. Ta je enaka 10^{-12} .

alph* Predpostavimo, da poznamo valovno dolžino radarskega signala le na 1 mm natančno. Kako natančno torej lahko določimo M_0^* ? Kakšna je napaka/občutljivost izračunane M_0^* ? Upoštevaj, da je lomni količnik $\text{Im}(-Km)$ tudi funkcija valovne dolžine:

$$\text{Im}(-Km)(\lambda) = A\lambda + B,$$

kjer sta $A = -0.00037 \text{ m}^{-1}$ in $B = 4.8 \cdot 10^{-5}$.

Ostali podatki: valovna dolžina radarja je 10 cm, lomni količniki $\text{Im}(-Km) = 1.1 \cdot 10^{-5}$ in gostota vode je 1000 kg m^{-3} . Namig: upoštevaj, da je prejeta moč radarskega signala sorazmerna s $P_0 l^2 r^4$, kjer l predstavlja oslabitev v eno smer, P_0 je oddana moč signala in r razdalja do radarja.

10.4.8

Skiciraj polje radialne hitrosti, kot jo pomeni Dopplerjev radar za tipičen primer polja horizontalnega vetra, ki se pojavlja v spodnjih plasteh atmosfere (Ekmanov sloj):

$$\begin{aligned} u(z) &= U \cos(k_u z) \\ v(z) &= U \sin(k_v z), \end{aligned}$$

kjer je $U = 1 \text{ m s}^{-1}$, vertikalna hitrost pa je 0. Koeficienta k_u in k_v sta določena tako, da velja:

- $u(0) = 0, u(H/2) = 0, u(H) = -U$
- $v(0) = v(H) = 0, v(H/2) = U,$

kjer je H neka poljubna vrednost. Pomagaj si z rotacijsko matriko za rotacijo okoli z in y smeri:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta & \sin \phi & \cos \phi \sin \theta \\ -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi & -\sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix}$$

kjer je θ azimutni kot, merjen od tal navzgor, in ϕ kot v ravnini x-y, merjen od x-smeri (vzhoda) proti y-smeri (severu). Skiciraj zgolj polje radialne hitrosti (izolinije, maksimume, minimume) za primer $\theta = \pi/4$ v smiselni razdalji od radarja. Razvoj v Taylorjevo vrsto ni potreben.

10.4.9

Z radarjem, ki pošilja signale z valovno dolžino 5.5 cm, zaznamo padavinsko območje širine 2 km, katerega izmerjena radarska odbojnost je 40 dBZ. S pomočjo relacije za količino konvektivnih padavin

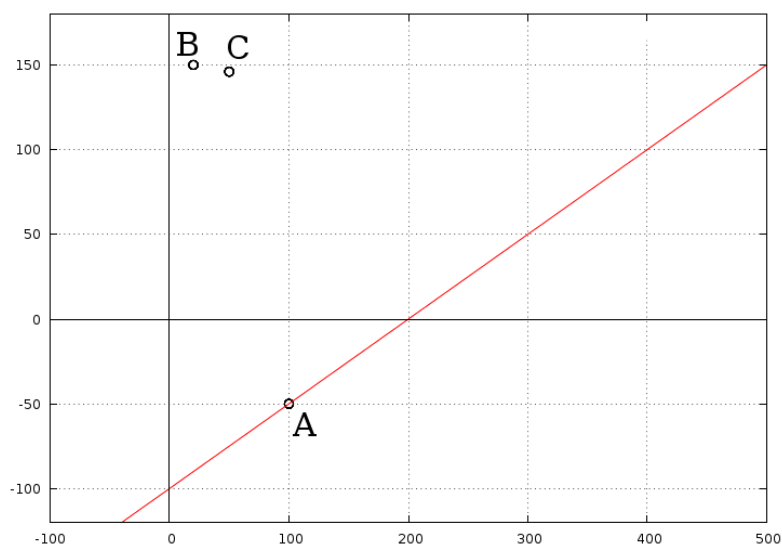
$$Z = 300 \text{ mm}^6 \text{ m}^{-3} R^{1.35}$$

oceni intenziteto padavin R . Kolikšno napako pri oceni intenzitete padavin smo naredili, ker nismo upoštevali, da imamo z vodnim filmom prekrita zrna toče, v katerih se absorbira 5.2 dBZ radarske moči?

10.4.10

Pot prvega letala opisuje trajektorija (slika 10.20), ki jo v kartezičnem koordinatnem sistemu trajektorijo opiše enačba $y_1(x) = \frac{1}{2}x - 100$ (enote so kilometri). Hitrost letala je vzdolž trajektorije leta konstantna in enaka $v_1 = 300\sqrt{5}\text{ km h}^{-1}$. Dopplerjev radar, ki se nahaja v izhodišču koordinatnega sistema pri $(0,0)$ zazna ob času t_0 prvo letalo na lokaciji A. Polega tega v istem trenutku radar vidi še neko drugo letalo v točki B. To letalo se kasneje premakne na lokacijo C. Predpostavimo, da tudi drugo letalo leti s konstantno hitrostjo, pri čemer trajektorijo leta prav tako opisuje linearna funkcija. Trajektoriji obeh letal se sekata, kar nakazuje na možnost, da letali v zraku trčita. Kakšno hitrost letala mora izmeriti Dopplerjev radar na lokaciji C, da letali trčita? Dodatni podatki:

- točka A = (100 km, -50 km)
- točka B = (20 km, 150 km)
- točka C = (50 km, 5550/38 km)



Slika 10.20: Slika k nalogi 10.4.10.

Literatura

- [1] Ahmad T. Abawi. The bending of bonded layers due to thermal stress. 2014.
- [2] Fred V. Brock and Scott J. Richardson. *Meteorological measurement systems* /. Oxford University Press,, New York :, 2001.
- [3] W. T. Chen and C. W. Nelson. Thermal stress in bonded joints. *IBM J. Res. Dev.*, 23(2):179–188, 1979.
- [4] J. Richard Doviak and S. Dušan Zrnić. *Doppler Radar and Weather Observations*. Academic Press Inc., 1993.
- [5] Matthew Duff and Joseph Towey. Two ways to measure temperature using thermocouples feature simplicity, accuracy and flexibility. *Analogue Dialogue*, 44(10), 2010.
- [6] Giles R. Harrison. *Meteorological Measurements and Instrumentation*. Wiley, 2015.
- [7] Leif Kristensen. *Cups, props and vanes*. 1994.
- [8] Ivan Kuščer and Slobodan Žumer. *Toplota*. DMFA založništvo, 2006.
- [9] Santiago Pindado, Javier Cubas, and Félix Sorribes-Palmer. The cup anemometer, a fundamental meteorological instrument for the wind energy industry. research at the idr/upm institute. *Sensors*, 14(11):21418–21452, 2014.
- [10] R. Sozzi and M. Favaron. Sonic anemometry and thermometry: theoretical basis and data-processing software. *Environmental Software*, 11(4):259–270, jan 1996.
- [11] Peter A. Taylor, David C. Catling, Mike Daly, Cameron S. Dickinson, Haraldur P. Gunnlaugsson, Ari-Matti Harri, and Carlos F. Lange. Temperature, pressure, and wind instrumentation in the Phoenix meteorological package. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 113(E3), 2008.