Lorenzov sistem

30. april 2018

Dinamiko konvektivnih celic, ki nastanejo pri segrevanju spodnjega robu tekočine in ohlajanju zgornjega robu v gravitacijskem polju, imenujemo Rayleigh-Benardova konvekcija. Ta je poenostavljen model atmosferske konvekcije. Reduciran sistem teh enačb v brezdimenzijskih količinah je študiral Lorenz:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z, \end{aligned} \tag{1}$$

kjer je parameter σ sorazmeren s Prandtlovim številom, ρ z Rayleighovim številom, β pa pomeni vertikalno razsežnost plasti, vsi parametri pa so pozitivni. Lorenzov sistem je nelinearen (vsebuje produkte prognostičnih spremenljivk), neperiodičen (orbite, trajektorije se ne ponavljajo, temveč sčasoma divergirajo) ter disipativen. V praksi disipativnost pomeni, da se 3D volumen V, ki vsebuje množico točk v bližnji okolici neke točke v faznem prostoru, $\mathbf{x} = [x, y, z]$ sčasoma krči in velja:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV, \tag{2}$$

od koder sledi

$$V(t) = V(0) \exp\left(-(\sigma + \beta + 1)t\right). \tag{3}$$

Posamezna trajektorija je opisana z $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$. Atraktor dinamike Zemljine atmosfere je klimatologija, ki je določena z oddaljenostjo Zemlje od Sonca (ta določa velikost energijskega toka), nagnjenostjo Zemlje glede na ekliptiko ter seveda s sestavo atmosfere. Tudi trajektorije spremenljivk na Zemlji so ujete - npr. temperatura ob teh pogojih nikoli ne more doseči 80°C ali - 120°C, vseeno pa imamo znotraj teh meja "bogato" dinamiko. Pri vrednostih parametrov, kot jih je uporabil Lorenz, t.j. $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ in $\rho = 28$, je dinamika sistema kaotična. Ena izmed lastnosti kaotičnih sistemov je močna občutljivost rešitve (trajektorije) na majhne spremembe v začetnih pogojih. Hitrost divergence dveh trajektorij, ki sta ob začetnem času infinitezimalno blizu skupaj (njuna razlika je $\delta\mathbf{x}(0)$), opišemo z Ljapunovim eksponentom λ, tako da velja

$$|\delta\mathbf{x}(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta\mathbf{x}(0)|. \tag{4}$$

Število Ljapunovih eksponentov je enako dimenziji faznega prostora (v našem primeru 3). V primeru večdimenzionalnih sistemov potem spremljamo Ljapunov spekter. Če je vsaj en Ljapunov eksponent $\lambda_i > 0$, pomeni, da je sistem kaotičen in da razlika med dvema trajektorijama narašča eksponentno, torej bosta sčasoma postali povsem različni. Največji in hkrati nestabilen eksponent

$$\lambda_{max} = \lim_{t \to \infty} \lim_{|\delta\mathbf{x}(0)| \to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta\mathbf{x}(t)|}{|\delta\mathbf{x}(0)|} \tag{5}$$

najhitreje narašča in po dolgem času povsem dominira Ljapunov spekter. Največji eksponent določa tipičen časovni okvir napovedljivosti, torej $\tau = 1/\lambda_{max}$.

a) Integriraj sistem najprej pri začetnem pogoju $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 1]$, nato pa pri rahlo naključno perturbiranem začetnem pogoju $\mathbf{x}_0 + c\delta\mathbf{x}$. Kdaj začneta trajektoriji divergirati? Kako je ta čas odvisen od velikosti perturbacije začetnih pogojev, torej od parametra c? Nariši potek spremenljivk $x(t)$, $y(t)$ in $z(t)$ v času. Nariši še trajektoriji v faznem prostoru x-z. Nato generiraj ansambel 1000 rahlo perturbiranih začetnih pogojev znotraj hipersfere in nariši točke v faznem prostoru x-z ob različnih integracijskih časih. Oceni, koliko časa drži linearna hipoteza (torej kdaj se hiperelipsoid deformira zaradi nelinearnih interakcij)? Kdaj pa dobi hipervolumen fraktalno obliko?

b) Simuliraj še ansambel (N>20) perturbiranih trajektorij za nek izbran c. Izračunaj časovno spreminjanje povprečja in standardne deviacije ansambla. Če začetne perturbacije predstavljajo tipične napake začetnega pogoja, potem je standardna deviacija ansambla analogija za napake v napovedi. Kako napaka narašča s časom? Poskušaj jo modelirati z logistično krivuljo

$$E(t) = \frac{E_{max}}{1 + (E(0)/E_{max} - 1)\exp(-\alpha t)}, \tag{6}$$

ki je rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{dE}{dt} = \alpha E \left(1 - \frac{E}{E_{max}}\right). \tag{7}$$

Poišči E_{max} in α. Po kolikšnem času postane napaka nasičena, npr. 90 % E_{max}. Ali je hitrost naraščanja napak odvisna od režima dinamike, bližine atraktorja? Kako izgleda naraščanje napak na različnih prostorskih velikostnih skalah, si lahko pogledaš v članku Žagar et al. (Tellus, 2017).

c) Oceni interval napovedljivosti Lorenzovega sistema pri različnih začetnih pogojih! Izračunati moraš torej največji nestabilen Lyapunov koeficient. Lorenzov sistem lineariziraj, izračunaj njegovo Jacobijevko $\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, skonstruiraj t.i. tangentni-linearni model (TLM) in z njim v času integriraj zelo majhno začetno perturbacijo $\delta\mathbf{x}(0)$. Vmes periodično renormaliziraj vektor perturbacije $\delta\mathbf{x}(t)$, da zaradi hitrega naraščanja napake ne pride do t.i. preobsega pri računanju. Nasvet: če računaš v klasičnih programskih jezikih (Fortran, C, C++), definiraj vse spremenljivke z double in renormaliziraj vsakih nekaj korakov, pametni (a mnogo počasnejši) programski jeziki, kot je Python, pa bodo to delali samodejno in do t.i. *overflowa* ne more priti.

d) Napake v začetnih pogojih, ki so posledica netočnih, pomanjkljivih ali nereprezentatnih meritev, in modelske napake, povzročijo, da vremenska napoved stanja Zemljinega ozračja (kaotičnega sistema) sčasoma divergira od pravega stanja. Modelski dinamični sistem lahko silimo z opazovanji in ga s tem ves čas popravljamo in približujemo točnemu stanju. Najbolj naivna in preprosta metoda vključevanja opazovanj je *nudging*. V Lorenzovem sistemu lahko x-spremenljivko silimo k neki opazovani vrednosti x_{obs} preprosto kot

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) + \frac{x_{obs} - x}{\tau}, \tag{8}$$

kjer je τ prost parameter, ki označuje relaksacijski čas. Izberemo ga tako, da je enakega velikostnega reda kot najmanjši člen v enačbi. Zopet vzemi osnovno trajektorijo (recimo ji resnica, *truth*) ter rahlo perturbirano (prvi približek, *first guess*). Osnovna trajektorija naj služi za generiranje točnih opazovanj $x_{obs}, y_{obs}, z_{obs}$ ob različnih časovnih instancah. S temi opazovanji sili prvi približek. Tako dobiš analizo, torej z opazovanji popravljen prvi približek. Ali se lahko približaš resnici? Prikaži grafe prvega približka, resnice in analize v času. Prosti parametri so časovna gostota opazovanj, opazljivke, relaksacijski koeficient, shema za relaksacijo itd.