Modeliranje advekcije

29. marec 2018

a) Integriraj linearno 1D enačbo advekcije koncentracije neke snovi (vodna para, aerosoli, itd.)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

na periodični domeni $x \in [0, 1]$, kjer je $u = 0.02$. Domeno opiši z $N + 1$ točkami, kjer naj bo $N = 200$. Velja torej $c_0 = c_N$ in $\Delta x = 1/N$. Začetni pogoj $c(x, 0)$ naj bo Gaussova perturbacija z amplitudo 1 in polširino 0.05, ki se nahaja točno na sredini domene. Pri integraciji uporabi različne diskretizacijske sheme:

- "upstream" shemo,
- "leapfrog" shemo,
- "Lax-Wendroff" shemo.

Ne pozabi zadostiti CFL kriteriju! Primerjaj dobljene rezultate z različnimi shemami ob času $T = 500$ z analitično rešitvijo. Katere lastnosti shem opaziš iz numeričnega eksperimenta? Preskočna (leapfrog) shema da dve rešitvi, ki med seboj ne interagirata. Računsko rešitev (computational mode) lahko dušimo z uporabo filtrov. Najbolj znan je Robert-Asselinov filter

$$\overline{c(t)} = c(t) + \frac{\alpha\nu}{2}(\overline{c(t-\Delta t)} - 2c(t) + c(t+\Delta t)) \tag{2}$$

za $\alpha = 1$ in $\nu \in [0.01, 0.2]$. Slabost filtra je, da se red natančnosti sheme zmanjša, poleg tega pa šibko duši tudi pravo fizikalno rešitev. Williams (2009) je v svojem članku zato predlagal modifikacijo Robert-Asselinovega filtra, ki poveča natančnost sheme na 3. red, hkrati pa ohranja fizikalno rešitev. Filter je dvokoračen

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{c(t)}} &= \overline{c(t)} + \frac{\alpha\nu}{2}(\overline{\overline{c(t-\Delta)}} - 2\overline{c(t)} + c(t+\Delta t)) \\
\overline{c(t+\Delta t)} &= c(t+\Delta t) - \frac{\nu(1-\alpha)}{2}(\overline{\overline{c(t-\Delta t)}} - 2\overline{c(t)} + c(t+\Delta t))
\end{aligned} \tag{3}$$

za $\alpha = 1/2$ in $\nu = 0.2$. Poskusi še s tema filtroma.

b) Obravnavaj nelinearno 1D enačbo advekcije

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(x)\frac{\partial c}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

kjer 1D hitrostno polje predstavlja nezvezna žagasta funkcija

$$u(x) = 0.01 + 0.1\begin{cases} x & x < 0.25 \\ 0.5 - x & 0.25 \le x < 0.75 \\ x - 1 & 0.75 \le x \end{cases} \tag{5}$$

Pri integraciji uporabi:

- forward diferenco v času, centralno v prostoru,
- "upstream" shemo (težave povzroča spreminjanje smeri hitrosti).

Kakšen CFL kriterij moraš izbrati v tem primeru? Primerjaj spekter rešitve ob končnem času T z analitičnim. Kaj opaziš? Bi se lahko tega efekta znebili s šibko numerično difuzijo ali spektralnim digitalnim filtrom?
Nariši še graf skupne mase v času. Ali sheme maso ohranjajo? Kaj pa, če diskretiziraš enačbo v tokovni obliki ("flux form")? Pri tem smo brez škode zanemarili dejstvo, da se tudi sama gostota zraka spreminja v divergentnem vetrovnem polju. Naša enačba v tokovni obliki je torej

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) = 0. \tag{6}$$

Preprosto jo lahko diskretiziramo z uporabo zamaknjene (staggered) mreže

$$\frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} + \frac{c_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+\frac{1}{2}}^n - c_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0 \tag{7}$$

Skušaj napraviti shemo, ki kar najbolje ohranja maso v času.

c) Skonstruiraj model 2D advekcije na sferi, diskretizirani v

- koordinatah geografske širine in dolžine,
- koordinatah Voronojevih točk (`voronoi.dat`).

Standardni test transportnih numeričnih shem (Lauritzen, 2012) je sledeč. Hitrostno polje je brezdivergentno in se s časom spreminja. Definirano je s tokovno funkcijo

$$\psi(\lambda, \theta, t) = \frac{10R_e}{T} \sin^2(\lambda') \cos^2(\theta) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) - \frac{2\pi R_e}{T} \sin(\theta), \tag{8}$$

kjer je $\lambda' = \lambda - 2\pi t/T$, perioda $T = 12$ dni in radij zemlje $R_e = 6.3712 \times 10^6$ m. λ je geografska dolžina, θ pa geografska širina. Po Helmholtzovem izreku velja za brezdivergenten tok $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$, od koder sledi

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \tag{9}$$

Začetno polje koncentracije snovi je

$$q_i = 0.95 \exp\left(-5\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)\right), \quad i = 1, 2, \tag{10}$$

kjer sta $(x, y) = (R_e \cos\theta \cos\lambda, R_e \cos\theta \sin\lambda)$. Centra obeh Gaussovk koncentracije snovi se nahajta na ekvatorju pri $(\lambda_1, \theta_1) = (5\pi/6, 0)$ in $(\lambda_2, \theta_2) = (7\pi/6, 0)$. Poglej, kako se razlikuje polje po času $t = T$ od začetnega polja koncentracije snovi. Gostota diskretizacijskih točk je poljubna.